
Physique des interactions fortes



L. Favart
I.I.H.E., CP-230
Université Libre de Bruxelles,
1050 Brussels
Laurent.Favart@ulb.be

Ce cours traite des interactions fortes et de leur interprétation en termes de particules élémentaires, les quarks et les gluons. Il adopte une approche principalement phénoménologique et discute les liens entre les mesures expérimentales et les prédictions de la chromodynamique quantique dans une approche perturbative, accessible à haute énergie.

Hormis l'introduction, le cours contient trois parties. Dans la première, on y discute la formation des hadrons à partir des quarks, la notion de jets hadroniques et on démontre que le groupe de Jauge correspondant aux interactions fortes est le groupe $SU(3)$. Les notions du confinement des quarks dans les hadrons et de liberté asymptotique sont également abordées. Dans la deuxième partie on étudie la structure hadronique : de quoi sont constitués les hadrons, quelles sont les densités de quarks et de gluons et on y discute la violation de l'invariance d'échelle dans une approche perturbative de la chromodynamique quantique, c'est-à-dire la façon dont les densités de quarks et de gluons dans un hadron dépendent de l'échelle d'énergie de l'interaction. Enfin dans la troisième partie on étudie les interactions proton-proton à haute énergie, entre autres dans le cas du LHC, et plus particulièrement la production de multiples jets et le processus Drell-Yan.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Un brin d'histoire	6
1.1.1	1909-1937 : de l'atome au nucléon	6
1.1.2	1940-1960 : les années folles ou une pléthore de hadrons	9
1.1.3	1968-2015 : Le modèle standard	13
2	Bases de la chromodynamique quantique	17
2.1	Petit rappel sur l'invariance de jauge en QED	18
2.2	Invariance de jauge non abélienne et le Lagrangien QCD	19
2.3	Les règles de Feynman pour QCD	24
2.4	La liberté asymptotique	26
2.4.1	Effet d'écrantage en QED	26
2.4.2	La constante de couplage de QCD	28
2.4.3	Petite discussion	29
2.4.4	Equation du groupe de renormalisation	30
2.4.5	La fonction bêta	30
2.4.6	Le paramètre Lambda	31
2.5	Le confinement	32
2.5.1	Etats de couleur du gluon	32
2.5.2	Le facteur de couleur	32
2.5.3	Le potentiel	34
3	Annihilation électron-positon	37
3.1	Section efficace totale $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$	37
3.2	Création d'une paire quark-antiquark	42
3.3	La formation de jets	45
3.4	Le pic du Z et haute énergie	46
3.5	Corrections radiatives QED	48
3.5.1	Radiation par l'électron et le positon incidents	49
3.5.2	Effet sur le pic du Z	51
3.6	Au-delà du Z	52
3.7	Production de particules	52
3.7.1	Les fonctions de fragmentation	53
3.7.2	Production de quarks lourds	56
3.8	Section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$	57
3.8.1	Approximation colinéaire	61
3.8.2	Corrections radiatives QCD virtuelles	61

3.9	Algorithmes de reconstruction de jets	63
3.9.1	Algorithme de JADE	64
3.9.2	Algorithme de k_T	65
3.9.3	Multiplicité de jets	65
3.10	Structure de l'état final hadronique	66
3.11	Comparaison des mesures de α_S	69
3.12	Test de la structure de jauge de QCD	69
4	La diffusion électron-proton	77
4.1	De l'atome au nucléon	77
4.1.1	Les noyaux atomiques : l'expérience de Rutherford	77
4.1.2	Section efficace de Dirac	77
4.1.3	Diffusion spin 1/2 sur cible nucléaire	81
4.2	Diffusion spin 1/2 sur nucléon	83
4.2.1	Prémises expérimentales	83
4.3	Diffusion profondément inélastique	85
4.3.1	Premières mesures au SLAC	85
4.4	Les fonctions de structure	89
4.4.1	Nouvelle vision des données SLAC	91
4.5	Le modèle des partons	91
4.5.1	Lien entre quarks et partons	94
4.6	Mesure étendue des fonctions de structure	96
4.7	La violation d'échelle et les équations DGLAP	103
4.7.1	Développement à l'ordre α_S	105
4.7.2	Ajustement DGLAP aux données	111
4.7.3	Saturation	114
5	Les interactions proton-proton	117
5.1	Production de jets	119
5.2	Remarques sur les factorisations QCD	124
5.3	Le processus Drell-Yan	125
5.3.1	A l'ordre le plus bas	125
5.3.2	Emission d'un jet supplémentaire (NLO)	128
5.3.3	Contraintes sur les PDF	128
5.3.4	La contribution du Z	129
5.3.5	Production du boson W	130
5.4	Remarques en guise de conclusion	132

Chapitre 1

Introduction

Le premier objet hadronique fut découvert il y a tout juste un siècle lors de la mise en évidence du noyau atomique ou même encore un peu avant si l'on considère le rayonnement α (noyau d'hélium). A partir des années 1960, la chromodynamique quantique (QCD) accumule les succès en permettant à la fois de décrire de façon simple la diversité des objets hadroniques (plus de 180 mésons et 150 baryons sont aujourd'hui répertoriés) et de prédire leurs interactions à partir de leurs constituants de base : les quarks et les gluons. Il est unique dans l'histoire des sciences, qu'une variété aussi grande de phénomènes puisse être expliquée et prédite avec précision à partir d'un nombre de paramètres si restreint.

Si la théorie QCD est aujourd'hui bien établie, elle n'en demeure pas moins complexe conceptuellement et calculatoirement. Cette complexité résulte de trois différences majeures par rapport à la théorie, plus simple et plus intuitive, qu'est l'électrodynamique quantique (QED).

La première difficulté provient de la constante de couplage, α_S , associée à QCD qui peut atteindre des valeurs proches ou voire même supérieures à l'unité, lors des interactions se déroulant sur un temps relativement long, rendant un développement perturbatif impossible. En revanche lors d'interactions de courtes durées la constante de couplage devient petite face au regard de l'unité et permet des prédictions théoriques précises (aujourd'hui, typiquement de l'ordre du pourcent voire le dixième de pourcent dans certains cas). Les grandes valeurs de α_S ont pour conséquence le confinement des quarks au sein des hadrons sur des échelles de temps relativement longues, c'est-à-dire directement observables par exemple dans un détecteur de particules. Sur une échelle de temps très courte, atteignable en laboratoire à l'aide de collisionneurs de particules de haute énergie (plus de quelques GeV), un comportement opposé apparaît dans lequel les quarks sont (quasi) libres (on parle de la liberté asymptotique). Dans les interactions faisant intervenir des hadrons soit dans l'état initial soit dans l'état final (temps longs) les phénomènes non perturbatifs seront toujours présents. Une question centrale dans ce domaine est donc de savoir comment factoriser les phénomènes perturbatifs des non perturbatifs c'est-à-dire comment séparer ce qui est calculable de ce qui ne l'est pas et qui doit être mesuré et modélisé de façon effective.

La seconde difficulté se place au niveau calculatoire et provient du caractère non abélien de QCD. Il correspond au fait que le gluon (champ de jauge de QCD) se couple à lui même (les gluons portent une charge de couleur). Des diagrammes supplémentaires apparaissent donc dès l'ordre 1 en α_S , compliquant rapidement les calculs. Or, la constante de couplage α_S reste en général relativement grande même dans le domaine perturbatif (α_S vaut environ 0.12 pour une échelle d'énergie correspondant à la masse du Z ce qui reste grand par rapport par exemple au 1/137 typique de QED) - voir figure 1.1. On peut donc s'attendre à ce que les termes de correction des ordres supérieurs soient relativement importants.

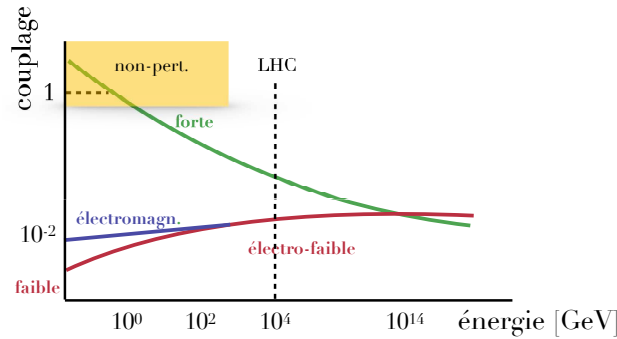


FIGURE 1.1 – Evolution des constantes de couplages en fonction de l'échelle d'énergie.

La troisième difficulté réside dans l'établissement du lien entre la théorie et ce qui est observable expérimentalement. Le Lagrangien de la théorie QCD est écrit pour les champs quantiques que sont les quarks et les gluons, soit des particules qui ne sont pas directement observables. Les observables sont basées sur la mesure de combinaisons multiples et complexes de quarks et de gluons : les hadrons (voire même de gerbes constituées d'un mélange de hadrons, de leptons et de photons). La confrontation des mesures expérimentales avec les prédictions théoriques nécessite donc une approche différente.

Il y a donc deux tâches qui s'offrent aux physiciens : comprendre et résoudre la QCD. Résoudre la QCD est un travail ardu qui demande une grande maîtrise calculatoire. Ces aspects ne seront développés ici que de façon limitée, basée sur les règles de Feynman pour des calculs se limitant à l'ordre dominant en les différents couplages.

1.1 Un brin d'histoire

Nous reprenons dans ce qui suit certaines étapes importantes dans la compréhension des interactions fortes et de la structure hadronique.

1.1.1 1909-1937 : de l'atome au nucléon

Découverte du noyau atomique

Au tout début du XX^e siècle, on savait que les atomes étaient électriquement neutres et qu'ils contenaient des électrons (chargés négativement) de masse bien inférieure à celle de l'atome. La question d'actualité était alors : "Comment la matière lourde et chargée positivement est-elle distribuée dans un atome ?". Il était généralement considéré qu'elle était distribuée uniformément dans le volume atomique. Un modèle en ce sens fut proposé par J.J. Thomson en 1910.

En 1909 Geiger, Marsden et Rutherford bombardent des feuilles de métal (argent, or) par des rayons α d'une énergie de 7.7 MeV issus d'une source radioactive de polonium ^{214}Po .

Un calcul probabiliste classique montre que la probabilité pour qu'une particule α soit diffusée à grand angle (ou même rétro-diffusée) est proche de zéro dans le cas d'un modèle comme celui de Thomson (chute exponentielle avec l'angle de diffusion). Or les mesures présentent un nombre important de diffusions à

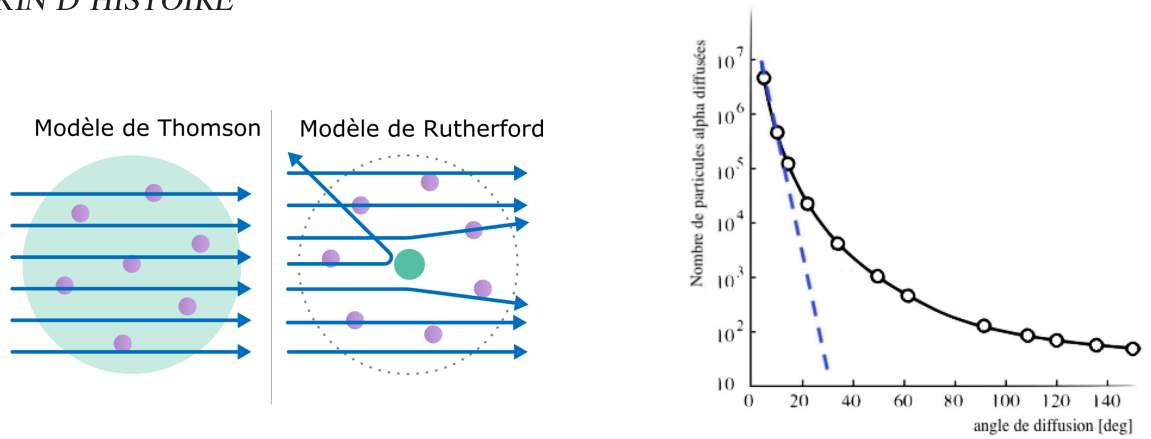


FIGURE 1.2 – Expérience dite de Rutherford

grand angle. Ce qui permit à Rutherford de déclarer en 1911 que l'atome devait être le siège d'un intense champ électrique. Une particule α sur 20.000 était diffusée à plus de 90 degrés (voir figure 1.2), contre seulement une sur 10³⁵⁰⁰ pour un modèle de répartition homogène (modèle de Thomson) auquel correspond une distribution en exponentielle décroissante. Le noyau atomique était né.

Rutherford calcula alors la dépendance angulaire attendue pour son modèle atomique. La section efficace différentielle en l'angle solide, pour la diffusion d'une particule de spin 0 sur un noyau de spin 0, en négligeant le recul du noyau, est donnée par :

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E_\alpha^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \alpha = e^2/4\pi \quad (1.1)$$

pour un noyau de charge Ze . Cette expression reproduit les données recueillies indépendamment sur des feuilles d'argent et d'or. Il déduisit que le noyau est 10.000 fois plus petit que l'atome, soit $10^{-14}m = 10fm$.

En 1913 Bohr propose son modèle atomique reproduisant les raies spectroscopiques de l'hydrogène.

Le proton et le neutron

Rutherford démontrera en 1919 que l'atome contient des protons (proton signifiant *premier*).

En 1930 le cyclotron est mis au point. Il permet d'accélérer des particules jusqu'à quelques dizaines de MeV.

En 1932, l'élève de Rutherford, James Chadwick, met en évidence l'existence du "proton neutre", c'est-à-dire le neutron. Avec l'électron et le photon, le proton et le neutron sont les constituants de base de la matière qui constitue presque toute la matière connue. Il est donc crucial de comprendre leurs propriétés.

Le proton est le seul hadron stable, son temps de vie est supérieur à 10³³ ans. Parmi ses caractéristiques, reprises dans le tableau ci-dessous, la valeur mesurée de son moment magnétique est intrigante. Ce moment est mesuré en unité μ_N , soit la valeur attendue du magnéton de Bohr $\mu_N = e\hbar/2m_Nc$ pour la masse d'un nucléon, m_N et de charge électrique e . Pour une particule élémentaire on s'attendrait à trouver une valeur proche de l'unité. Cette déviation claire fut le premier signe d'une sous-structure (en sous-constituants chargés) dans le proton.

	proton	neutron
masse	938.280 MeV	939.573 MeV
temps de vie	stable	898 ± 16 sec
charge	+1	0
spin	1/2	1/2
moment magnétique	$2.793\mu_N$	$-1.913\mu_N$

Le neutron possède un temps de vie moyen d'environ 15 min et se désintègre de façon faible : $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$. Cette désintégration constitue un petit effet qui est en général négligé au regard des interactions fortes. De plus le neutron peut être stable quand il est lié au sein de certains noyaux. A titre d'exemple le 2D de $(1p, 1n)$ et de masse $m = 2.014 u$ (en unité atomique de masse) et le 3He de $(2p, 1n)$ et de masse $m = 3.02 u$ sont stables. Le 2D ne se désintègre pas en 2He , plus massif que lui ($m = 2.016 u$), mais au contraire : ${}^3He \rightarrow {}^2D e^+ \nu_e$.

Du point de vue des interactions fortes le proton et le neutron sont presque identiques. Leur masses étant de plus extrêmement proches (la masse du neutron étant supérieure à celle du proton de seulement 0.14%) permettent de penser que les champs de liaison internes sont similaires. Heisenberg introduira la notion de symétrie d'isospin pour rendre compte de ces caractéristiques. Cependant cette petite différence de masse est un paramètre important. Si la masse du neutron était plus faible, la quantité d'He par rapport à l'H serait beaucoup plus importante et des étoiles comme notre soleil n'existerait pas. Si au contraire elle était plus grande, il n'existerait aucun atome stable plus lourd que l'H.

La différence de masse peut être comprise en raison d'effets électro-magnétiques entre les quarks au sein du nucléon. Ce résultat ne fut obtenu qu'en 2015 [S. Borsanyi et al., Science, 237, 1452, 2015].

Théorie de Yukawa

Le pion a été imaginé par Hideka Yukawa en 1935, pour expliquer la stabilité du noyau des atomes qui devraient se désintégrer sous l'effet de la force électromagnétique répulsive : le pion est porteur de la force nucléaire forte qui lie protons et neutrons (voir figure 1.3). Sa masse était estimée à 200 fois celle de l'électron.

Le pion chargé fut découvert en 1947 dans les émulsions nucléaires, à Bristol par l'équipe de C. Powell et al. en bombardant des particules α sur une cible de carbone. L'analyse des plaques d'émulsion permet alors d'identifier les pions chargés par leur désintégration en muons (et neutrinos non observés) : $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu$. Le pion chargé possède une masse de 140 MeV, un spin 0 et interagit fortement avec les noyaux. Le pion neutre (π^0) fut découvert peu de temps après.

La portée d'une interaction, R , est liée à la masse de la particule échangée

$$R = c\Delta t \sim \hbar/\Delta E \sim 1/m \quad (1.2)$$

La portée des interactions fortes est de la taille typique des protons et des neutrons, $1 fm = 10^{-15} m$, la masse de la particule échangée est donc de l'ordre de 100 MeV.

Le potentiel de Yukawa a pour expression :

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R} \quad \text{pour } r > 0 \quad (1.3)$$

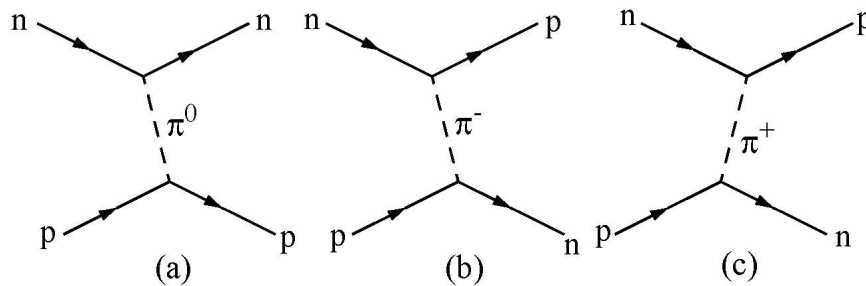


FIGURE 1.3 – Modèle de Yukawa pour les forces nucléaires.

où g est une constante et r la distance. On peut remarquer que pour une masse nulle, $R \rightarrow \infty$, on retrouve le potentiel coulombien de l'électromagnétisme.

1.1.2 1940-1960 : les années folles ou une pléthore de hadrons

Au milieu des années 1940, les noyaux apparaissent comme étant formés de protons et de neutrons. Ces derniers sont considérés, avec l'électron, comme les constituants élémentaires de la matière. Vient s'ajouter la quatrième particule fondamentale, le photon, le médiateur des interactions électromagnétiques. On pense avoir fait le tour de la question.

Des multiplets de hadrons aux quarks

La fin des années 1940 et les années 1950 voient le développement des accélérateurs de particules (synchrocyclotron, puis synchrotron) avec, en particulier, le Bevatron à Berkeley (énergie de 6.2 GeV pour des ions légers) qui permet la découverte de l'antiproton et de "résonances" (particules à courte durée de vie). Les grands accélérateurs ont été par la suite les principaux instruments de découverte en physique des particules. Au début des années 1960 on avait découvert une centaine de hadrons. Le long temps de vie de certaines de ces particules permettait d'établir qu'il ne s'agissait pas seulement de résonances mais qu'elles étaient sujettes à des désintégrations faibles.

Vu leur nombre croissant, il était clair que ces hadrons ne pouvaient plus être considérés comme "élémentaires". D'autre part, un certain nombre d'expériences de diffusion montraient que le proton n'est pas ponctuel mais a une extension spatiale de l'ordre de 10^{-15} mètre.

Pour essayer d'établir un certain ordre dans l'accumulation des données expérimentales, deux approches complémentaires ont été suivies. La première a consisté à classer les hadrons c'est-à-dire à en faire la spectroscopie. La voie octuple, proposée en 1961 par Y. Ne'eman et M. Gell-Mann, met en évidence une symétrie d'hypercharge au sein des hadrons connus à l'époque, correspondant au groupe SU(3). En 1964 Murray Gell-Mann et George Zweig proposent, indépendamment l'un de l'autre, le modèle des quarks.

L'autre approche suivie consiste à faire des expériences de diffusion aux plus hautes énergies possibles pour "casser" le hadron et "libérer", s'ils existent, ses constituants. C'est cette quête d'énergie toujours plus élevée qui motive la construction d'accélérateurs, puis de collisionneurs toujours plus puissants. Du point de vue théorique, deux voies ont été suivies :

- dans les années 1960-1970, la "matrice S" et les pôles de Regge, qui permettent de "comprendre" les

collisions avec de petits transferts d'énergie ;

- le modèle des partons par J.D. Bjorken et R.P. Feynman, formulé en 1969-1972, faisant suite à la découverte, en 1968, de la structure granulaire du proton dans la diffusion ep à l'accélérateur linéaire du SLAC par Friedman, Kendall, Taylor et al. Nous discuterons cette découverte importante au chapitre 4.

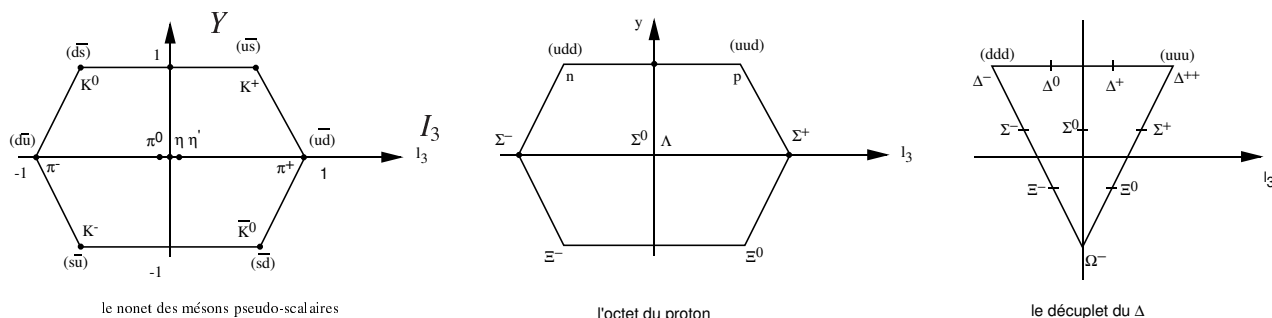
La "voie octuple"

Revenons sur les idées et découvertes qui ont permis à Ne'eman et Gell-Mann au début des années 1960 d'introduire la classification des hadrons comme éléments de représentations du groupe de symétrie $SU(3)$.

En 1932, W. Heisenberg introduit l'isospin fort, I , pour exprimer le fait que l'interaction forte ne distingue pas le proton du neutron : ces derniers sont les deux états d'une même particule, le nucléon. Par analogie avec le spin, le nucléon d'isospin $1/2$ peut être dans un état d'isospin "up" ($I_3 = 1/2$, proton) ou d'isospin "down" ($I_3 = -1/2$, neutron). L'interaction forte ne peut distinguer ces deux états, ce qui s'exprime mathématiquement par l'invariance sous une rotation dans l'espace d'isospin, en conséquence de quoi l'isospin y est un nombre quantique conservé. Le groupe d'invariance associé est $SU(2)$. Le nucléon appartient à la représentation fondamentale 2. Quant aux pions (π^+ , π^0 , π^-) ils appartiennent à la représentation adjointe 3.

Avec la découverte des particules étranges en 1947, un nouveau nombre quantique est introduit. Il est conservé dans les interactions fortes et est appelé l'hypercharge, Y , défini par $Y = S + B$, où S est le nombre quantique d'étrangeté et B le nombre baryonique. L'hypercharge est reliée à la charge électrique Q par la relation $Q = I_3 + Y/2$. Remarquons que si le nombre quantique d'étrangeté est conservé dans les interactions fortes en revanche elle ne doit pas être conservée dans les interactions faibles par courant chargé.

Ne'eman et Gell-Mann introduisent le groupe d'invariance d'hypercharge $SU(3)$, qui combine la symétrie $SU(2)$ d'isospin et l'étrangeté, et classent les hadrons dans les représentations de ce groupe. Les hadrons d'un même multiplet ont les mêmes spin, parité et C-parité mais se distinguent par la valeur de leur hypercharge et leur composante d'isospin. On observe que les mésons peuvent être classés dans les représentations singulet (1) ou octet (8) alors que les baryons sont tous dans les représentations octet (8) ou décuplet (10). Des exemples de multiplets sont donnés ci-dessous (1 et 8 (=nonet) des mésons pseudo-scalaires, l'octet du proton $1/2^+$, et 10 du baryon Δ , $3/2^+$).



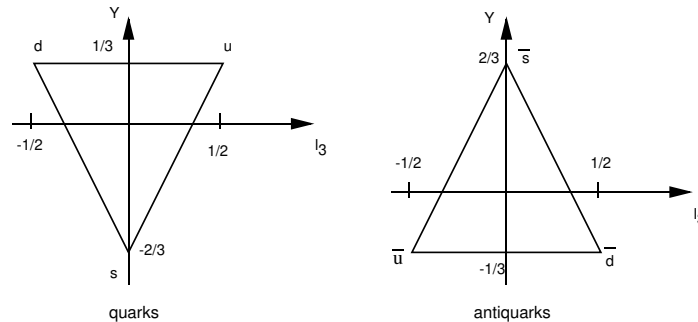
La symétrie d'hypercharge $SU(3)$ n'est pas exacte, en particulier parce que les particules d'un même multiplet n'ont pas la même masse ($m_{\pi^\pm} \sim 139,5702$ MeV et $m_K \sim 493,68$ MeV). On peut noter que la symétrie $SU(2)$ d'isospin est également brisée, mais dans des proportions moindres, par les interactions électromagnétiques ($m_{\pi^\pm} \sim 139,5702$ MeV et $m_{\pi^0} \sim 134,9766$ MeV).

Le modèle des quarks

Il était surprenant de voir que la représentation de plus basse dimension de $SU(3)$ d'hypercharge, la représentation fondamentale triplet 3, n'apparaissait pas. En 1964, Gell-Mann et indépendamment G. Zweig introduisent le "modèle des quarks". Les quarks sont des particules hypothétiques qui sont précisément membres de la représentation fondamentale 3 de $SU(3)$ appelé alors $SU(3)$ de saveur. Ces quarks sont caractérisés par les nombres quantiques suivants :

- charge fractionnaire, exprimée en unité de $-e$, la charge de l'électron : $(2/3, -1/3, -1/3)$
- nombre baryonique : $(1/3, 1/3, 1/3)$
- étrangeté : $(0, 0, -1)$ et donc hypercharge $(1/3, 1/3, -2/3)$.

Ces trois quarks correspondent à trois saveurs (u , d , s) pour "up", "down" et "strange". Les antiquarks sont dans la représentation conjuguée $\bar{3}$.



Tous les hadrons connus pouvaient être construits à l'aide,

- pour les mésons, d'une paire quark-antiquark (nombre baryonique = 0),
- pour les baryons, de trois quarks (nombre baryonique = 1).

En tenant compte de la brisure de symétrie de masse (quark s beaucoup plus massif que les quarks u et d) on arrive à comprendre, dans ce modèle, la masse des hadrons ainsi que leurs propriétés de désintégration. Un des succès incontestable du modèle est la prédiction du baryon $\Omega^- = (sss)$ deux ans avant sa découverte expérimentale par Samios et al. à Brookhaven.

La structure hadronique

En opposition, les expériences de diffusions inélastiques de leptons sur des nucléons (voir chapitre 4 de ce cours) montrèrent à partir de 1968 que les nucléons étaient constitués de particules légères et quasiment libres appelées partons.

Il fallu de nombreuses années pour se rendre compte que ces partons n'étaient autres que les quarks (et les gluons), mais qu'un potentiel particulier pouvait les lier à l'intérieur des hadrons.

Les modèles de hadrons construits à partir des études de spectroscopie et diffusion à haute énergie sont maintenant unifiés en une théorie unique, la Chromodynamique Quantique (QCD), dont les bases ont été établies dans les années 1970 et 1980 avec la participation de très nombreux physiciens.

La couleur

Du point de vue théorique ce modèle posait un problème : en effet la fonction d'onde d'un baryon, construite à partir des fonctions d'onde des quarks, était symétrique par échange de deux quarks ce qui

est en contradiction avec la statistique de Fermi-Dirac (principe d'exclusion de Pauli stipulant que deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique). On peut voir cela de façon simple pour les baryons $\Delta^-(S = 0, Q = -1, J = 3/2)$, $\Delta^{++}(S = 0, Q = 2, J = 3/2)$ et le $\Omega^-(S = -3, Q = -1, J = 3/2)$. Ces trois baryons sont composés de quarks identiques $\Delta^-(ddd)$, $\Delta^{++}(uuu)$ et $\Omega^-(sss)$. Par ailleurs ce sont des particules de spin $3/2$, donc il existe un état particulier où les 3 spins sont alignés, dans l'état $J_3 = 3/2$ par exemple. Prenons l'exemple du Δ^{++} , on peut écrire sa fonction d'onde comme

$$|\Delta^{++}(J_3 = 3/2)\rangle = |uuu\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \otimes |orbital\rangle$$

L'état $|orbital\rangle$ est associé à une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ solution d'une équation d'onde. De façon générale, la solution d'énergie minimale d'une telle équation ne s'annule pas; elle ne peut donc pas être antisymétrique. L'état du Δ^{++} ci-dessus ne peut donc pas être antisymétrique dans l'échange de deux quarks quelconques.

Pour résoudre ce problème, un nouveau nombre quantique est introduit par Greenberg, Han et Nambu : la **couleur**. Chaque quark existe en trois variétés de couleur ($N_c = 3$), $i = r, g, b$, de sorte que l'on a

$$u = \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} s_r \\ s_g \\ s_b \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

A ce nouveau nombre quantique est associé le groupe de symétrie de couleur SU(3), quelquefois dénoté SU(3)_c pour le distinguer de la symétrie SU(3) de saveur opérant sur les u, d, s . Chaque quark est donc un triplet de couleur et on postule que les hadrons sont des singlets de couleur (les hadrons sont incolores et la couleur est donc une symétrie cachée). Ainsi la fonction d'onde du Δ^{++} , de spin $J_3 = 3/2$,

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}}(u_r^\uparrow u_g^\uparrow u_b^\uparrow - u_r^\uparrow u_b^\uparrow u_g^\uparrow + u_b^\uparrow u_r^\uparrow u_g^\uparrow - u_b^\uparrow u_g^\uparrow u_r^\uparrow + u_g^\uparrow u_b^\uparrow u_r^\uparrow - u_g^\uparrow u_r^\uparrow u_b^\uparrow), \quad (1.5)$$

est totalement antisymétrique sous une permutation des couleurs. De manière générale, on écrit alors la fonction d'onde du baryon comme

$$|hadron\rangle = |couleur\rangle \otimes |saveur\rangle \otimes |spin\rangle \otimes |orbital\rangle.$$

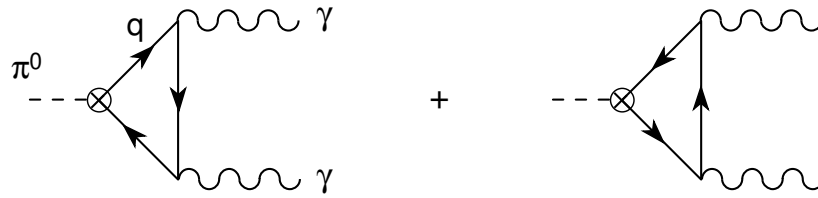
Elle est construite de façon qu'elle soit totalement antisymétrique dans l'espace des couleurs mais totalement symétrique en ce qui concerne le $|saveur\rangle \otimes |spin\rangle \otimes |orbital\rangle$ (si on néglige les masses).

On comprend aussi qu'il n'existe pas de hadron dans la représentation 1 de saveur, comme mentionné plus haut, car sa fonction d'onde serait globalement symétrique, puisqu'antisymétrique à la fois dans l'espace des couleurs et des saveurs. Les mésons sont aussi des singlets de SU(3)_c, et leur fonction d'onde s'écrit, du point de vue de la couleur

$$meson = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_r \bar{q}'_{\bar{r}} + q_g \bar{q}'_{\bar{g}} + q_b \bar{q}'_{\bar{b}}) \quad (1.6)$$

Les règles ci-dessus "expliquent" pourquoi il n'existe pas d'états hadroniques $[qq]$ ou $[qq\bar{q}]$ puisqu'ils ne sont pas des 1 de couleur, mais n'exclut pas l'existence d'états $[qq\bar{q}\bar{q}]$ ou $[qqq\bar{q}q]$.

Si la couleur est nécessaire pour la cohérence interne du modèle des quarks elle l'est également du point de vue expérimental comme on peut le voir en considérant la désintégration du pion neutre en 2 photons via une boucle de quarks.



La largeur de la résonance est donnée par [3] :

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \frac{\alpha^2 m_\pi^2}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7.73 \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \text{eV}.$$

où N_c est le nombre de couleurs, m_π la masse du pion neutre, f_π la constante de désintégration du $\pi \rightarrow \mu\nu$ qui vaut $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ d'après la largeur de désintégration du pion chargé. Comme on mesure $\Gamma_{obs} = 7.7 \pm 0.6 \text{ MeV}$, on en déduit que $N_c = 2.99 \pm 0.12$.

Les états de couleurs sont dégénérés, c'est-à-dire que la spectroscopie ne montre pas de différences de niveaux d'énergies pour différents états de couleurs (par exemple entre un $q_r \bar{q}_r$ et un $q_b \bar{q}_b$). C'est l'invariance de Jauge par rotation dans l'espace de couleur SU(3)_c qui fait apparaître les champs de Jauge associés aux gluons (voir prochain chapitre) dans QCD.

Le modèle des quarks s'est enrichi au cours des années avec la découverte de 3 nouveaux éléments.

1.1.3 1968-2015 : Le modèle standard

Cette dernière période s'étalant jusqu'à nos jours voit s'établir le modèle standard de physique des particules, se compléter le tableau des quarks, et l'établissement solide de QCD comme la théorie des interactions fortes.

Découvertes du charme et de la beauté

Un quatrième quark avait été postulé dès 1970 par G. Glashow, J. Iliopoulos et L. Maiani (mécanisme de "GIM") pour expliquer que les "courants neutres" (couplage au futur boson Z) conservent la saveur ($Z \rightarrow u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$, mais pas $d\bar{s}$). De plus l'étude des oscillations $K^0 - \bar{K}^0$ (diagramme de boîte : $d\bar{s} \rightarrow s\bar{d}$ via 2 W) nécessite d'introduire le charme. La découverte de nouveaux mésons vecteurs beaucoup plus étroits que les ρ, ω et ϕ fut une surprise et la confirmation de l'existence du quark appelé charme.

Le méson J/Ψ a été découvert en 1974 simultanément dans deux expériences

$$\begin{aligned} \text{SPEAR au SLAC (B. Richteretal.)} \quad e^+e^- \rightarrow & \Psi \rightarrow \text{hadrons}(86\%) \\ & \hookrightarrow e^+e^- (7\%) \\ & \hookrightarrow \mu^+\mu^- (7\%) \\ \text{Brookhaven (S.Tingetal.)} \quad p(28\text{GeV})Be \rightarrow & J + X(\text{hadrons}) \\ & \hookrightarrow e^+e^- \end{aligned} \quad (1.7)$$

La valeur de sa section efficace indiquait que le quark charmé est de charge électrique 2/3. Le J/Ψ est le plus léger des états $c\bar{c}$ dans la famille dite du *charmonium*, de nombres quantiques $J^{PC} = 1^{--}$ c'est-à-dire

comme le photon.

On découvrit également un peu plus tard de nouveaux mésons $D^0(c\bar{u})$, $D^+(c\bar{d})$ de masse $\simeq 1.87$ GeV et D^* de masse de 2.01 GeV, trop élevées pour être produits dans les désintégrations des J/Ψ et Ψ' .

Le quark "bottom" ou "beauté" a également été découvert sous forme d'un état lié, le Υ , de temps de vie anormalement long pour leur masse, en 1977 à Fermilab par l'expérience E288 - L. Lederman et al. La particule fut identifiée par sa désintégration leptonique : $p(400\text{GeV}) + Be \rightarrow \mu^+\mu^-X$. Plusieurs états excités furent ensuite identifiés, par des collisions e^+e^- , dans le pic de masse initialement observé, ainsi que d'autres états appelés B combinant quarks b, c, s, u et d .

Découverte des gluons

La première évidence indirecte de l'existence des gluons provient de l'observation, en 1978, de la désintégration (dite directe) du $\Upsilon(1S)$ en hadrons, produit par collision e^+e^- aux anneaux de stockage DORIS (DESY) et mesurée par l'expérience PLUTO. L'étude des distributions angulaires ont fourni l'évidence du spin 1 du gluon.

La première évidence directe de l'existence des gluons fut la mesure de la production de hadrons se plaçant dans un plan et formant clairement une structure à 3 jets, par les expériences TASSO, JADE, PLUTO et MARK-J auprès de l'anneau de stockage PETRA (DESY) fournissant des collisions e^+e^- avec une énergie dans le centre de masse entre 17 et 32 GeV. Si la majorité des événements produits présentait 2 jets, 5% de la statistique en possédait un troisième. Les premières prédictions de QCD (incluant la radiation d'un gluon de spin 1) furent couronnées de succès en fournissant une bonne description des mesures suivant différentes observables.

Découverte du top

Le quark "top" fut découvert en 1994, soit 17 ans plus tard dû à sa masse très élevée, au TeVatron (Fermilab) par l'expérience CDF et un peu plus tard par D0. La masse ($m_t \sim 176$ GeV) avait été estimée, par des calculs portant sur les corrections de boucle au propagateur du W , sur la base des résultats extrêmement précis des expériences du LEP. Le top est aussi nécessaire pour expliquer par exemple la large fréquence dans le mélange $B^0 - \bar{B}^0$ comme mesuré par Babar et Belle en 2006. Contrairement aux quarks plus légers, le quark top, partenaire prévu du quark b mais avec une charge $+2/3$, ne peut pas se lier à d'autres quarks pour former un hadron $t\bar{t}$. En effet, la largeur totale de désintégration $\Gamma_{top} \sim G_F m_{top}^3 \Rightarrow \tau_{top} \simeq 4 \cdot 10^{-25}$ s alors que l'hadronisation a pour échelle d'énergie $\Lambda_{QCD} \sim 200 - 300$ MeV ce qui implique un temps d'hadronisation supérieur au temps de vie du top : $\tau_{had} \simeq 10^{-23}$ s $\gg \tau_{top}$.

La mise en évidence d'un signal issu de la production de top est donc faite en favorisant une topologie d'événements basée sur la chaîne suivante : la fusion de deux quarks issus des protons donne un gluon hautement virtuel qui forme une paire $t\bar{t}$ (non liée). Le t (resp. \bar{t}) se désintègre en b (resp. \bar{b}) en émettant un W^+ (resp. W^-). Les W se désintègrent alors soit en lepton chargé et neutrino soit en paire $q\bar{q}$ qui s'hadronisent et forment deux (ou plus) jets (voir plus tard dans le cours). On sélectionne donc une topologie du type, 4 jets (2 pour les b et 2 pour 1 des W) un lepton chargé (e ou μ) et une impulsion transverse manquante (pour le ν).

En résumé, les quarks apparaissent sous 6 saveurs différentes qui sont maintenant regroupées en trois "générations" : (u, d) , (c, s) et (t, b) , chaque quark ayant trois couleurs (r, v, b) . Leurs caractéristiques suivant

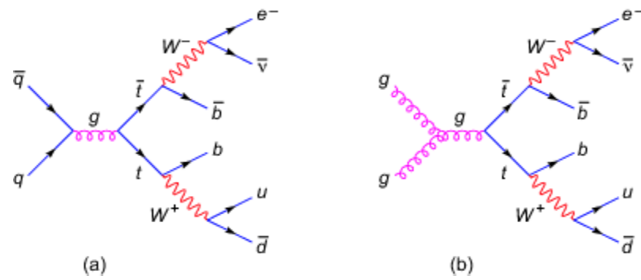


FIGURE 1.4 – Les deux diagrammes principaux de production du quark top qui permirent sa découverte au TeVatron.

les valeurs mesurées les plus précises sont reprises dans le tableau ci-dessous

quark	B	Q	I_3	s	c	b	t	masse
u	1/3	2/3	1/2	0	0	0	0	$(1.5 - 3) 10^{-3}$ GeV
d	1/3	-1/3	-1/2	0	0	0	0	$(3 - 7) 10^{-3}$ GeV
s	1/3	-1/3	0	-1	0	0	0	$(70 - 120) 10^{-3}$ GeV
c	1/3	2/3	0	0	1	0	0	1.15 – 1.35 GeV
b	1/3	-1/3	0	0	0	-1	0	4.1 – 4.3 GeV
t	1/3	2/3	0	0	0	0	1	174.3 ± 5.1 GeV

A chaque quark correspond un anti-quark dont les nombres quantiques ont des valeurs opposées et qui peut prendre trois anti-couleurs ($\bar{r}, \bar{v}, \bar{b}$).

Des expériences récentes mettent en évidence l'existence de hadrons n'étant pas constitués de 2 ou de 3 quarks mais plutôt de 4 quarks : les tetraquarks $[q\bar{q}q\bar{q}]$ et de 5 quarks : les pentaquarks $[qqqq\bar{q}]$.

Chapitre 2

Bases de la chromodynamique quantique

Avant d'entrer dans le détail de l'interaction entre quarks et gluons nous reprenons ici quelques rappels sur l'électrodynamique quantique. Le principe de construction de la théorie est le même dans les deux cas mais le cas abélien de QED est plus simple à écrire. Le comportement asymptotique (infrarouge et ultraviolet) des deux théories est cependant complètement différent.

Le principe de base qui guide la construction de modèles en physique des particules, dont le modèle standard en particulier, est celui de l'invariance de jauge locale, suivant lequel les propriétés physiques ne dépendent pas des phases des champs. Toute la physique est contenue dans la densité lagrangienne, $\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x))$, une fonctionnelle locale des champs $\psi(x)$ et de leurs dérivées, à partir de laquelle on construit l'action :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)).$$

L'évolution classique du champ $\psi(x)$ est donnée par les équations d'Euler-Lagrange obtenues en imposant que l'action est stationnaire sous une variation du champ (principe d'Hamilton) :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi(x)} = 0 \quad (2.1)$$

C'est à partir de ces équations, qu'en formalisme de seconde quantification, on obtient les règles de Feynman qui permettent de calculer perturbativement n'importe quel processus en théorie des champs.

L'invariance de jauge locale implique que le Lagrangien reste invariant sous une transformation de symétrie locale des champs. Celle-ci généralise les symétries ayant pour degrés de liberté l'espace-temps, telles les rotations et translations spatiales. A la différence que seule l'interaction entre la particule et un champ externe permet d'obéir à ce principe. Le champ définissant l'interaction est celui dont les transformations de jauge compensent exactement celles encourues par le champ de matière $\psi(x)$. D'un point de vue physique, cela équivaut au remplacement de la dérivée partielle apparaissant dans la théorie libre par la dérivée covariante dont la connexion est définie par le champ décrivant l'interaction. D'une certaine façon, l'invariance de jauge peut être interprétée comme la traduction de l'impossibilité expérimentale de distinguer les effets résultant d'une transformation de symétrie locale appliquée au champ de matière de ceux introduits par une redéfinition du champ porteur de l'interaction.

La connaissance du groupe de symétrie auquel satisfait un champ de matière et sous lequel le Lagrangien décrivant son interaction doit demeurer invariant permet de déterminer les propriétés du champ porteur de l'interaction ainsi que la forme de son couplage à la matière à partir des générateurs et des constantes de structure définissant le groupe de Lie associé.

2.1 Petit rappel sur l'invariance de jauge en QED

Les équations du mouvement d'une particule chargée libre de spin 1/2 découlent du Lagrangien :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (2.2)$$

où $\psi(x) = u(\mathbf{p})e^{-ix \cdot p}$ représente le quadri-spineur (particule ($E > 0$) et l'antiparticule ($E < 0$), deux états d'hélicité, $\lambda = \pm 1/2$), ou spineur de Dirac, décrivant la particule et $\bar{\psi}(x)$ le spineur adjoint, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, où ψ^\dagger est le hermitien conjugué de ψ ($\psi^\dagger = (\psi^T)^*$). Les matrices (4X4) de Dirac, $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ sont liées aux matrices de Pauli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et β (dans le choix habituel de représentation de SU(2)) anticommutatrices et de carré égal à l'identité.

Le champ de matière, $\psi(x)$, satisfait à la symétrie $U(1)_Q$ attachée à la conservation du courant électrique et correspondant à un changement de phase local du quadri-spineur $\psi(x)$, appelé transformation de jauge :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}(x), \quad (2.3)$$

où $\alpha(x)$ est une fonction réelle. La transformation du champ ainsi définie ne modifiant en rien la mesure des observables qui en découle.

Le principe d'invariance de jauge locale sous ce groupe de symétrie impose le remplacement de la dérivée partielle présente dans la théorie libre par la dérivée covariante :

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu + ieA^\mu(x). \quad (2.4)$$

Celle-ci satisfait à la condition d'invariance sous le changement de phase locale :

$$D^\mu \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)} D^\mu \psi(x) \quad (2.5)$$

qui définit les lois de transformation du champ $A^\mu(x)$ associées à celle du quadri-spineur $\psi(x)$:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x). \quad (2.6)$$

Cette dernière relation correspond à une transformation de jauge du champ électromagnétique auquel on identifie dès lors le champ $A^\mu(x)$ présent dans la dérivée covariante. Le Lagrangien de la théorie en interaction s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{jauge}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le terme \mathcal{L}_0 correspond au Lagrangien d'une particule libre de spin 1/2, le terme \mathcal{L}_{int} traduit l'interaction entre le champ de matière et le champ électromagnétique et le terme \mathcal{L}_{jauge} représente l'énergie cinétique contenue dans ce dernier, le tenseur du champ électromagnétique, dit tenseur de Maxwell, étant défini par la relation :

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x). \quad (2.8)$$

qui est fourni par l'application du commutateur des dérivées covariantes au champ électromagnétique :

$$[D^\mu, D^\nu] A_\nu = -ie F^{\mu\nu} A_\nu. \quad (2.9)$$

L'application des équations d'Euler-Lagrange mène à l'équation de Dirac :

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = -e \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x),$$

où le dernier terme est celui d'interaction, et aux équations de Maxwell inhomogènes :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x).$$

Quant aux équations homogènes elles résultent de :

$$\partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\rho\lambda}(x) = 0.$$

Ici l'invariance de jauge est dite locale car α dépend de x et abélienne car $\alpha(x)$, étant une fonction de x qui commute avec elle-même.

2.2 Invariance de jauge non abélienne et le Lagrangien QCD

Comme aucune structure fine liée à la présence de la charge de couleur n'est observée dans les niveaux d'énergie des hadrons, la couleur doit constituer une symétrie exacte de l'Hamiltonien gouvernant la dynamique des quarks. Autrement dit, les trois états de couleur ψ_q^r , ψ_q^g et ψ_q^b associés à une saveur q donnée sont dégénérés d'un point de vue de l'interaction forte pour laquelle toute combinaison linéaire des 3 états de couleur ψ_q^r , ψ_q^g et ψ_q^b est donc équivalente aux 3 états ψ_q^r , ψ_q^g et ψ_q^b considérés individuellement. La loi de transformation :

$$\begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_{q'}^r \\ \psi_{q'}^g \\ \psi_{q'}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rg} & U_{rb} \\ U_{gr} & U_{gg} & U_{gb} \\ U_{br} & U_{bg} & U_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

doit dès lors constituer une opération de symétrie pour le Lagrangien dont découlent les équations du mouvement caractérisant la dynamique de l'interaction forte. La fonction d'onde de couleur associée à un quark de saveur q :

$$\psi_q^c = \begin{pmatrix} \psi_q^r \\ \psi_q^g \\ \psi_q^b \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

constitue un triplet de la représentation du groupe de symétrie associé dont la loi de transformation s'écrit sous forme matricielle :

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = U \psi_q^c, \quad (2.12)$$

la matrice carrée U de dimension 3 étant unitaire par conservation de la probabilité et de déterminant égal à 1 afin d'assurer un mélange entre les différents états de couleur et ne pas se limiter à une transformation qui multiplierait chaque état par le même facteur de phase globale. Une matrice de déterminant unitaire est dite spéciale et la matrice U appartient dès lors au groupe de symétrie $SU(n)_c$ pour lequel la dimension n reste à déterminer, l'indice c rappelant qu'il s'agit d'une symétrie associée à la conservation de la charge

Remarque 1 : l'invariance de jauge garantit que le photon est de masse nulle : en effet, un terme tel que $m^2 A_\mu A^\mu$ ne serait pas invariant de jauge.

de couleur. La fonction d'onde de couleur associée à un antiquark est donnée par l'hermitien conjugué de la fonction d'onde de couleur associée au quark de saveur correspondante :

$$\psi_{\bar{q}}^c = \psi_q^{c\dagger}. \quad (2.13)$$

La loi de transformation de la fonction d'onde de couleur attachée à un antiquark s'écrit donc :

$$\psi_{\bar{q}}^c \rightarrow \psi_{\bar{q}}^{c'} = \psi_q^{c\dagger} U^\dagger. \quad (2.14)$$

On peut à présent remarquer que la fonction d'onde de couleur associée à un méson demeure invariante sous les transformations de symétrie 2.12 et 2.14 :

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{q}_1 q_2}^c &= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^c \psi_{q_2}^c \rightarrow \psi_{\bar{q}_1 q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^{c'} \psi_{q_2}^{c'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^{c\dagger} U^\dagger U \psi_{q_2}^c \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{q_1}^{c\dagger} \psi_{q_2}^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{\bar{q}_1}^c \psi_{q_2}^c \\ &= \psi_{\bar{q}_1 q_2}^c \end{aligned} \quad (2.15)$$

et constitue donc bien un singulet de couleur de la représentation du groupe de symétrie considéré.

Remarque : Si l'on envisage pour ce dernier le groupe de symétrie $SU(2)_c$, on peut montrer qu'une représentation tridimensionnelle de ce groupe possède la propriété que la matrice U décrivant les transformations 2.12 et 2.14 peut être choisie réelle. En choisissant réelle également la fonction d'onde de couleur associée à un quark, toute distinction entre les fonctions d'onde de couleur attachées à un quark et un antiquark ainsi qu'entre leurs lois de transformation respectives disparaît alors :

$$\begin{aligned} (\psi_q^c)^\alpha &= (\psi_{\bar{q}}^c)^\alpha, \\ (\psi_q^{c'})^\alpha &= (\psi_{\bar{q}}^{c'})^\alpha. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dans ces conditions, les combinaisons $q q$ et $\bar{q} \bar{q}$ constituent également des singulets de couleur pour la représentation tridimensionnelle du groupe de symétrie $SU(2)_c$. Elles devraient donc pouvoir être observées dans la nature, ce qui n'est pas le cas.

On est ainsi naturellement amené à considérer le groupe $SU(3)_c$ comme celui décrivant la symétrie du Lagrangien de la chromodynamique quantique ou QCD (Quantum Chromo Dynamics). On peut en effet montrer que pour ce groupe, il est impossible de trouver une matrice U purement réelle et seule la combinaison $q \bar{q}$ décrivant les mésons constitue pour ce groupe un singulet de couleur parmi l'ensemble des combinaisons à deux corps. On démontre de même que l'expression associée au baryon est bien la seule à définir un singulet de couleur sous le groupe $SU(3)_c$ parmi l'ensemble de toutes les combinaisons possibles à 3 corps.

Si l'on considère à présent une transformation infinitésimale sous le groupe $SU(3)_c$, l'expression 2.12 peut se réécrire sous la forme :

$$\psi_q^c \rightarrow \psi_q^{c'} = (\mathbb{I} + i\xi) \psi_q^c \quad (2.17)$$

dans laquelle la matrice carrée ξ de dimension 3 est caractérisée par des éléments négligeables au second ordre. L'unitarité de la matrice U implique que la matrice ξ est hermitienne :

$$\xi = \xi^\dagger \quad (2.18)$$

et la condition imposant le déterminant de U égal à 1 entraîne que la matrice ξ est de trace nulle :

$$tr(\xi) = 0. \quad (2.19)$$

Les deux contraintes 2.18 et 2.19 réduisent à huit le nombre de paramètres distincts nécessaires pour définir la matrice ξ et l'on choisit conventionnellement de l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\xi_8}{\sqrt{3}} + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 & \xi_4 - i\xi_5 \\ \xi_1 + i\xi_2 & \frac{\xi_8}{\sqrt{3}} - \xi_3 & \xi_6 - i\xi_7 \\ \xi_4 + i\xi_5 & \xi_6 + i\xi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\xi_8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \xi_a \lambda_a \\ &= \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi},\end{aligned}\tag{2.20}$$

le vecteur $\vec{\xi}$ ayant pour composante a le coefficient ξ_a et le vecteur $\vec{\lambda}$ la matrice carrée λ_a de dimension 3, hermitienne et de trace nulle. Les matrices λ_a ($a = 1, \dots, 8$) ainsi définies constituent une représentation à trois dimensions des générateurs du groupe de symétrie $SU(3)_c$, la relation de fermeture de l'algèbre de Lie qui leur est associée définissant les constantes de structure f_{abc} du groupe :

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}.\tag{2.21}$$

On a par exemple $f_{123} = 1$ et un tel groupe dont les générateurs ne commutent pas entre eux est dit non-abélien (un champ de jauge non-abélien est aussi appelé un champ de Yang-Mills). Une définition de ces matrices souvent utilisée est celle de Gell-Mann :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.22}$$

En utilisant la décomposition 2.20 de la matrice ξ sur la base $\{\lambda_a\}$ des générateurs de $SU(3)_c$, la transformation infinitésimale considérée s'écrit à présent :

$$U(\vec{\xi}) = \mathbb{1} + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}.\tag{2.23}$$

L'existence d'une algèbre de Lie associée aux transformations de symétrie du Lagrangien de l'interaction forte permet de considérer une rotation de valeur finie dans l'espace du degré de liberté de couleur comme résultant de la succession d'un nombre arbitrairement élevé de transformations proches de l'identité. En désignant par $\vec{\alpha}$ le vecteur des paramètres caractérisant une transformation de valeur finie, on a dès lors :

$$\begin{aligned}U(\vec{\alpha}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[U\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{n} \right)^n \\ &= e^{i \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

De manière à faire apparaître explicitement la constante de couplage g de l'interaction forte, on réécrit cette dernière relation sous la forme :

$$U(\vec{\alpha}) = e^{ig \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}}. \quad (2.25)$$

Le principe d'invariance de jauge locale sous une transformation de symétrie du groupe $SU(3)_c$ impose maintenant que le Lagrangien de la chromodynamique quantique soit invariant sous la loi de transformation de la fonction d'onde de couleur :

$$\psi_q^c(x) \rightarrow \psi_q^{c'}(x) = e^{ig \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)} \psi_q^c(x). \quad (2.26)$$

Cette requête est satisfaite en remplaçant la dérivée partielle apparaissant dans l'expression du Lagrangien de la théorie libre :

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{q=1}^{nf} \bar{\psi}_q^c(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_q^c(x) \quad (2.27)$$

par la dérivée covariante dont la connexion définit le champ porteur de l'interaction :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \rightarrow D_\mu &= \partial_\mu + ig \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{A}_\mu(x) \\ &= \partial_\mu + ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

On identifie alors les 8 potentiels-vecteurs $A_\mu^a(x)$ aux 8 gluons vecteurs de l'interaction forte. Chacun d'eux est associé à l'un des 8 générateurs λ^a du groupe de symétrie $SU(3)_c$ et les champs de gluons déterminent par conséquent l'amplitude de chacune des 8 rotations indépendantes qu'il est possible de réaliser dans l'espace du degré de liberté de couleur. La dérivée covariante introduite en 2.28 satisfait à la condition d'invariance de jauge locale :

$$D'_\mu \psi_q^{c'}(x) = e^{ig \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\alpha}(x)} D_\mu \psi_q^c(x) \quad (2.29)$$

qui impose la loi de transformation pour les champs de gluons.

En se limitant à une transformation infinitésimale $\vec{\xi}(x)$ de la fonction d'onde de couleur caractérisant le champ de matière :

$$\psi_q^{c'}(x) = \left[\mathbb{1} + ig \frac{\vec{\lambda}}{2} \cdot \vec{\xi}(x) \right] \psi_q^c(x) \quad (2.30)$$

en négligeant dès lors le terme proportionnel à $\delta A_\mu \xi$, et en recourant à l'identité :

$$(\vec{\lambda} \cdot \vec{a})(\vec{\lambda} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - i f_{abc} \lambda_a b_b a_c, \quad (2.31)$$

on obtient finalement la transformation du champ de gluons $A_\mu^a(x)$ sous un changement de jauge infinitésimal $\vec{\xi}(x)$:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{a'}(x) = A_\mu^a(x) - \partial_\mu \xi^a(x) - g f_{abc} \xi^b(x) A_\mu^c(x). \quad (2.32)$$

Cette relation indique que les champs de jauge se transforment selon la représentation régulière du groupe de symétrie $SU(3)_c$, ce qui signifie que les coefficients de leurs lois de transformation sont précisément donnés par les constantes de structure du groupe.

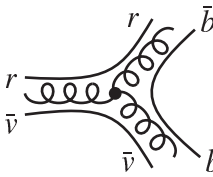
Afin de déterminer à présent l'énergie cinétique contenue dans le champ de gluons, on considère l'application du commutateur des dérivées covariantes au champ $\vec{A}^\nu(x)$:

$$[D_\mu, D_\nu] \vec{A}^\nu(x) = i g \frac{\lambda^a}{2} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)] \vec{A}^\nu(x). \quad (2.33)$$

Cette expression peut être généralisée au groupe de symétrie $SU(3)_c$ et fournit l'expression du tenseur de force associé à l'interaction de couleur :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \quad (2.34)$$

Cette relation fait apparaître la propriété essentielle que possède le champ de jauge d'interagir avec lui-même, les gluons vecteurs de l'interaction forte étant dès lors porteurs d'une charge de couleur. La conservation de cette dernière implique que chacun des 8 gluons ($n^2 - 1 = 8$) corresponde à une combinaison linéaire de deux états colorés respectivement attachés à une couleur et une anticouleur.

$$g_{r\bar{v}} \rightarrow g_{r\bar{b}} + g_{b\bar{v}}$$


On dispose à présent de l'ensemble des contributions du Lagrangien de la chromodynamique quantique et celui-ci s'écrit en sous-entendant les sommations sur les différentes saveurs de quark présentes et sur les indices de couleur répétés :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_q^c(x) \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - g \gamma^\mu A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} - m \right] \psi_q^c(x) - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{jauge}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

les contributions \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_{jauge} et \mathcal{L}_{int} étant respectivement données par :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_q^c(x) [i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi_q^c(x) \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} [\partial^\mu A_\nu^a(x) - \partial^\nu A_\mu^a(x)] [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)], \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -g \bar{\psi}_q^c(x) \gamma^\mu A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \psi_q^c(x) + \frac{g}{2} f_{abc} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) \\ &\quad - \frac{g^2}{4} f_{eab} f_{ecd} A_a^\mu(x) A_b^\nu(x) A_\mu^c(x) A_\nu^d(x). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le premier terme de la contribution \mathcal{L}_{int} constitue le couplage entre le champ de matière et le champ de gluons. Les deux derniers termes représentent respectivement l'interaction entre 3 gluons et 4 gluons, la première étant proportionnelle à g et la seconde d'ordre g^2 . Ce couplage du champ de couleur avec lui-même engendre le fait qu'il est impossible d'envisager le gluon comme une particule libre et le vide de la chromodynamique quantique est en lui-même le siège d'interactions.

Dans le Lagrangien ci-dessus, le paramètre g gouverne à lui seul l'invariance de jauge. Cette constante universelle est appelée la constante du couplage de jauge. Ce Lagrangien n'est pas unique, on peut ajouter des termes de puissance plus élevées de $F_{\mu\nu}^a$ et ψ qui respecte les invariances de jauge locale, de Lorentz ainsi que sous les inversions de temps et d'espace. Ces termes supplémentaires peuvent être éliminés par les exigences de renormalisabilité tout comme en QED.

2.3 Les règles de Feynman pour QCD



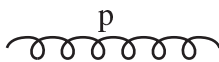
Dans le formalisme de la quantification canonique (rappel : on utilise le principe de correspondance et, dans l'espace des impulsions, on identifie $\partial^\mu \rightarrow -ip^\mu$), le Lagrangien nous permet obtenir les règles de Feynman (en fait l'action $S = \int d^4x \mathcal{L}$).

Le Lagrangien libre \mathcal{L}_0 (équation 2.36) donne l'expression des propagateurs. Partant de l'équation du mouvement dérivée du Lagrangien, le propagateur est donné par l'opérateur inverse. Pour le champ de jauge de QED, l'équation du mouvement est donnée par $iJ_e^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu}$ où des termes de jauge resteront bien que les quantités physique n'en dépendent pas.

Les règles régissant les interactions sont traitées comme des perturbations et donc données directement par le Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_{int} (équation 2.38). Il nous donne les expressions des couplages quark-gluon et aux termes de couplage à 3 et 4 gluons.

La jauge (covariante) est représentée par le facteur ξ qui vaut $\xi = 1$ pour la jauge de Feynman et $\xi = 0$ pour la jauge de Landau. Notons enfin que nous utilisons la notation $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$.

Particules externes :

	quark entrant : bispineur $u(p)$	quark sortant : $\bar{u}(p)$
	antiquark entrant : $\bar{v}(p)$	antiquark sortant : $v(p)$
	gluon entrant : vecteur de pol. $\epsilon_\mu(p)$	gluon sortant : $\epsilon_\mu^*(p)$

Propriétés :


Equation de Dirac :

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u(p, s) &= \bar{u}(p, s)(\not{p} - m) = 0 \\ (\not{p} + m)v(p, s) &= \bar{v}(p, s)(\not{p} + m) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

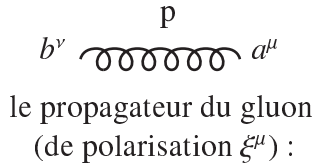
Relations de fermeture : (avec $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$)

$$\begin{aligned} \sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) &= \not{p} + m \\ \sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) &= \not{p} - m \end{aligned} \quad (2.40)$$

Propagateurs :

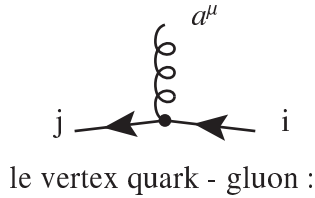
 le propagateur du quark :

$$G_j^i(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \delta_j^i = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \delta_j^i$$

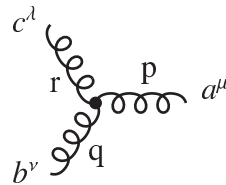


$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{-i\delta^{ab}}{p^2} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]$$

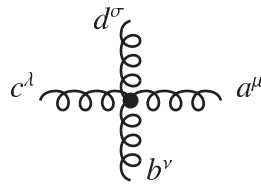
Interactions :



$$(\Gamma^{a\mu})_i^j = ig\gamma^\mu(\lambda^a)_i^j$$



$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p, q, r) = -gf^{abc}[(p-q)_\lambda g_{\mu\nu} + (q-r)_\mu g_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu g_{\mu\lambda}]$$



$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\sigma}^{abcd} = -ig^2 f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) - ig^2 f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) - ig^2 f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma})$$

Tous les vertex dépendent des indices de couleur des lignes croisées. Les indices de couleur adjointes pour les gluons : a, b, c, d , les indices i, j pour les quarks et antiquarks. Par convention quand on a les impulsions p, q et r , on les choisit telles que $p + q + r = 0$. Les lignes de quarks et antiquarks sont représentées par les bispineurs u_i et \bar{u}^j .

Le propagateur du quark est identique à celui d'un autre fermion, avec simplement des indices de couleur et de saveur qui doivent bien évidemment être conservés.

Les lignes de gluon portent un vecteur de polarisation ξ^μ identique à celui du photon hormis l'indice supplémentaire de couleur adjointe.

Notons que dans toutes les interactions le couplage g apparaît. On remarque aussi qu'à l'ordre le plus bas en g , le processus dominant est l'émission d'un boson de jauge (i.e. gluon).

Enfin remarquons que, afin de quantifier proprement le Lagrangien de QCD, des termes dits fantôme de Faddeev-Popov sont ajoutés pour préserver l'invariance de jauge. Ces termes techniques (qui disparaissent

pour certains choix de jauge), sans véritable contenu physique, ne seront pas discutés ici.

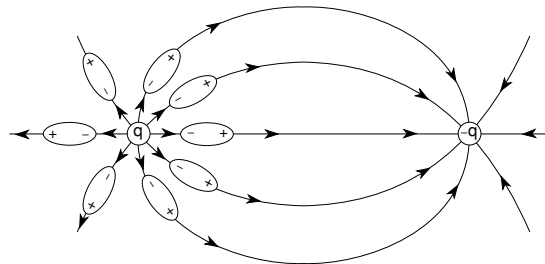
L'existence d'auto-interaction des champs de jauge est responsable des propriétés de liberté asymptotique et de confinement de l'interaction forte.

2.4 La liberté asymptotique

Nous pouvons à présent entamer la discussion des aspects dynamiques de QCD. Pour comprendre la dynamique d'une théorie des champs il est nécessaire de comprendre comment la constante de couplage se comporte en fonction de la distance. Ce comportement est déterminé par la réponse du vide à la présence d'une charge, le principe d'incertitude permettant des fluctuations du vide en paires de particule-antiparticule pendant un temps inversement proportionnel à leur énergie.

2.4.1 Effet d'écrantage en QED

La théorie quantique des champs nous dit que le vide contient des paires de particules-antiparticules virtuelles se formant et s'annihilant en permanence. En présence d'une charge électrique ces paires se polarisent et influence la charge effective observée. Quand on parle de charge, il faut donc spécifier la distance à laquelle on s'y intéresse. Cette distance est donnée par la longueur d'onde de de Broglie de la particule diffusée par la présence de cette charge : $r \sim 1/p$.



En QED l'effet d'écrantage de la charge électrique peut être calculé en resommant les corrections de boucle électron-positon au propagateur du photon : $\gamma^* \rightarrow (e^+ e^-)^* \rightarrow \gamma^*$. Ce qui nous intéresse est le couplage qui apparaît à chaque vertex. A l'ordre le plus bas, on a (sans écrire les spineurs des fermions entrant et sortant) :

$$(-i)e_0\gamma^\mu \cdot (-i)\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i)e_0\gamma^\nu = ie_0^2\gamma^\mu\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\gamma^\nu \quad (2.41)$$

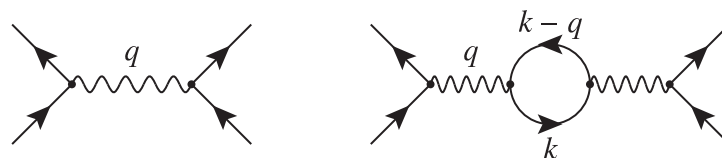


FIGURE 2.1 – Propagateur du photon à l'ordre le plus bas et correction à une boucle de fermions.

Au premier ordre de boucle :

$$(-i)e_0\gamma^\mu \cdot (-i)\frac{g_{\mu\rho}}{q^2} \cdot (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[(-i)e_0\gamma^\rho \frac{i(\mathbf{k}+m)}{k^2-m^2} (-i)e_0\gamma^\lambda \frac{i(\mathbf{k}-\mathbf{q}+m)}{(k-q)^2-m^2} \right] \cdot (-i)\frac{g_{\lambda\nu}}{q^2} (-i)e_0\gamma^\nu \quad (2.42)$$

Le facteur explicite (-1) est dû à la boucle de fermions. La trace vient du fait que l'on somme sur les états d'hélicité des fermions de la boucle (tout comme on intègre sur toutes les impulsions possibles) :

$$\sum_{\alpha,\beta,\xi,\zeta} \gamma_{\alpha,\beta}^\rho (\mathbf{k}+m)_{\beta,\xi} \gamma_{\xi,\zeta}^\lambda (\mathbf{k}-\mathbf{q}+m)_{\zeta,\alpha} = Tr \left[\gamma^\rho (\mathbf{k}+m) \gamma^\lambda (\mathbf{k}-\mathbf{q}+m) \right] \quad (2.43)$$

$$= 4g^{\rho\lambda}(m^2 - k \cdot (k-q)) + 8k^\rho k^\lambda - 4(k^\lambda q^\rho + k^\rho q^\lambda) \quad (2.44)$$

Le calcul de la boucle fait apparaître des *divergences ultraviolettes* correspondant aux cas où les particules de la boucle portent une impulsion infiniment grande ($k \rightarrow \infty$) avec des termes du type :

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-m^2)^2} = \int \frac{k^3}{(k^2-m^2)^2} dk d\Omega,$$

où k est la norme de l'impulsion dans la boucle et Ω l'élément d'angle solide ($d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$). Ce qui donne une divergence logarithmique : $\int dk/k$. Pour donner un sens au calcul, on régularise l'intégrale en introduisant un *cut-off* ultraviolet μ_R .

$$\int^\infty \frac{dk}{k} \rightarrow \int^{\mu_R} \frac{dk}{k} \quad (2.45)$$

La dépendance en k disparaît dans l'intégrale et laisse un logarithme en q^2/μ_{UV}^2 . On obtient alors :

$$ie_0^2\gamma^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \gamma^\nu \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) + \frac{e_0^2}{12\pi^2} F(q^2) \right] \quad (2.46)$$

où $F(q^2)$ est une fonction finie qui disparaît pour $q^2 \rightarrow \infty$.

On introduit alors la charge renormalisée (pour laquelle on n'a gardé que le terme de correction logarithmique - LLA ou *Leading Log Approximation*) :

$$e_{eff}^2(1 - \text{boucle}) = e_0^2 \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) \right] \quad (2.47)$$

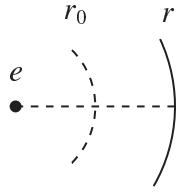
Si l'on rajoute des diagrammes à un nombre supérieur de boucles, les divergences montent en puissance. On obtient :

$$e_{eff}^2(q^2) = e_0^2 \left[1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) + \left(\frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2 - q^2}{\mu_{UV}^2} \right) \right)^2 + \dots \right] \quad (2.48)$$

soit en posant $Q^2 = -q^2$ et négligeant la masse, la somme de la série arithmétique donne :

$$e^2(Q^2) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{Q^2}{\mu_{UV}^2}}. \quad (2.49)$$

De façon plus intuitive on peut ré-exprimer cet effet en fonction de la distance ($r \sim 1/Q$) :



$$e^2(r) = \frac{e^2(r_0)}{1 + \frac{2e^2(r_0)}{12\pi^2} \ln \frac{r}{r_0}} \quad (2.50)$$

Le calcul a été fait ici dans le cas d'une boucle e^+e^- pour fixer les idées, les autres boucles doivent bien sûr aussi être calculées ($\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$ et $q\bar{q}$ pour chaque saveur et chaque couleur).

Cette dépendance a des propriétés étonnantes. A grande distance d'une charge localisée en r_0 , $r \gg r_0$, on peut négliger l'unité présente au dénominateur, ce qui mène à une charge $e(r)$ indépendante de la charge "nue" $e(r_0)$. En revanche, quand $r_0 \rightarrow 0$, $\ln r/r_0 \rightarrow \infty$, si $e(r_0)$ est fini, $e(r) \rightarrow 0$ pour tout r à distance finie de r_0 . Ce qui signifie que les interactions dans la limite locale ($r_0 \rightarrow 0$) tendent vers zéro ce qui pose un problème fondamental. Le paradoxe est levé par le fait que quand $r_0 \rightarrow 0$, $e(r_0) \rightarrow \infty$, le problème ne peut donc pas être traité de façon perturbative comme il a été fait pour obtenir la relation 2.50. Ce problème fut résolu par Gribov [5] par la procédure dite de renormalisation. La valeur de la constante de couplage est telle que ce problème ne se pose qu'à des distances extrêmement petites qui resteront probablement à jamais hors d'atteinte expérimentale. On retrouve la limite de l'électromagnétisme classique pour $r \gg r_0$: $\alpha = 1/137$.

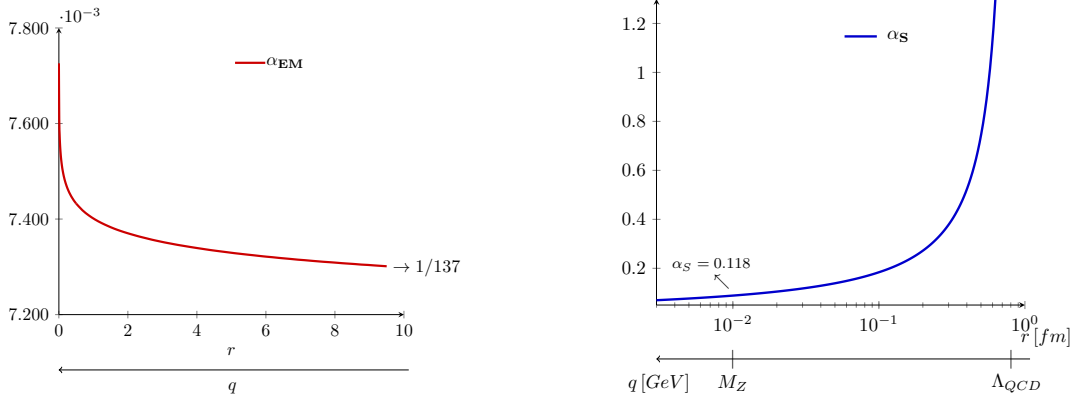


FIGURE 2.2 – a) Evolution de la constante de couplage électromagnétique en fonction de la distance à la charge électrique nue. b) Evolution de la constante de couplage forte en fonction de la distance à la charge de couleur nue.

En définissant

$$\alpha_0 = \frac{e_0^2}{(4\pi)}, \quad (2.51)$$

Pour ne pas dépendre du cut-off, on choisit une échelle de renormalisation μ_R . La procédure de renormalisation consiste alors à soustraire $\alpha(\mu_R)$ à $\alpha(Q^2 = -q^2)$. On obtient alors la relation physique du lien entre deux échelles Q^2 et μ_R^2 :

$$\alpha_{em}(Q^2) = \frac{\alpha(\mu_R^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu_R^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu_R^2}}, \quad (2.52)$$

2.4.2 La constante de couplage de QCD

En QCD, la situation est qualitativement différente et correspond à un effet d'*antiécranage* : le couplage est petit à faible distance et augmente à grande distance. Cette propriété découverte par Gross, Wilczek et

Politzer [6] appelée *liberté asymptotique* leur valu le prix Nobel de physique en 2004.

L'expression de dépendance en la distance de la constante de couplage forte se calcule également à partir des corrections de boucles au propagateur du boson responsable de l'interaction, ici le gluon.

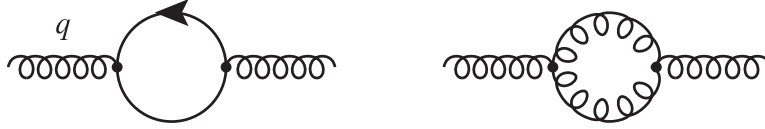


FIGURE 2.3 – Corrections de boucle de quarks et gluons au propagateur du gluon.

La boucle de quarks est similaire à celle de e^+e^- du cas de QED mis à part un facteur provenant de la trace $Tr(\lambda^a \lambda_a) = 2$ et de la somme sur les saveurs (ici laissé comme paramètre N_f). Par conservation de la couleur, il n'y a pas de somme sur celle-ci.

La boucle de gluons a une expression proche mis à part :

— il s'agit de boson (pas de signe (-1))

— un facteur numérique différent issu de l'intégrale : $11/4$ du, entre autres, à la somme sur les couleurs.

Le caractère vectoriel du courant au vertex de fermion n'apparaîtra pas non plus, mais cela n'a pas d'importance ici car l'effet est dominé par les bornes de l'intégrale dont la divergence est du même type $\int d^4k/k^4$.

En posant

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}, \quad (2.53)$$

nous obtiendrons donc :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{1 - \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu_R^2) \ln \frac{Q^2}{\mu_R^2}}. \quad (2.54)$$

Le terme $11N_c$ provient de la contribution des gluons et le terme $2N_f$ provient de la contribution des quarks. En comparant les relations 2.52 et 2.54 on peut voir que les quarks induisent un effet similaire sur $\alpha_s(\mu_R = Q)$ à celui des charges électrique sur α_{em} tandis que les gluons induisent un effet de signe opposé. L'effet de compétition entre quarks et gluons s'annulerait pour $N_f = 11N_c/2$.

L'origine des divergences ultraviolettes est liée au fait que l'on suppose la théorie valable quelque soit l'échelle d'énergie considérée, en particulier quand $Q^2 \rightarrow \infty$. Par les relations d'incertitude de Heisenberg cela correspond à des distances infiniment petites. Ceci est à contraster avec la situation habituelle en physique où les lois ont un domaine de validité limité. Par exemple, la physique atomique est caractérisée par une longueur $l \simeq \text{Å} = 10^{-10}\text{m}$ alors que la physique nucléaire est caractérisée par $l \simeq 1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$. Cela correspond respectivement à des énergies de l'ordre de 1 eV et 100 MeV tandis que le domaine de la physique des particules est de 1 GeV et au delà.

2.4.3 Petite discussion

Oublions pour un instant les aspects quantiques et considérons le vide comme un milieu continu avec une constante diélectrique ϵ . La constante diélectrique est liée à la perméabilité magnétique μ et la vitesse de la lumière, c par :

$$\epsilon \mu = \frac{1}{c^2} = 1.$$

Un milieu avec effet d'écrantage correspond à $\epsilon > 1$ sera donc diamagnétique ($\mu < 1$) et inversement un milieu paramagnétique ($\mu > 1$) correspond à un antiécrantage menant à la liberté asymptotique.

Quand un électron se déplace dans un champ magnétique externe, deux effets entrent en compétition pour déterminer la perméabilité magnétique :

- le courant induit par le mouvement de la charge dans le champ magnétique produit un champ magnétique de direction opposée au champ extérieur (effet diamagnétique),
- le spin de la particule s'aligne sur la direction du champ magnétique extérieur (effet paramagnétique). En QED, l'effet diamagnétique l'emporte induisant l'effet d'écrantage de la charge électrique.

En QCD, les gluons portent une charge de couleur et ils ont un spin plus élevé (spin 1) que les quarks ou les électrons (spin 1/2) et l'effet paramagnétique l'emporte induisant l'antiécrantage. La liberté asymptotique signifie que la charge (ici de couleur) mesurée approche zéro à une distance infinitésimale. Remarquons enfin qu'il n'y a pas d'effet de saturation à grande distance, ce qui correspond à la notion de confinement : les quarks ne peuvent échapper aux hadrons.

La suite de cette section reprend quelques définition importantes.

2.4.4 Equation du groupe de renormalisation

Revenons au cut-off que nous avons du introduire. Comme μ_R est un paramètre arbitraire, la correction à l'observable sans dimension, R , au couplage α_S ne peut pas dépendre de μ_R^2 . Donc :

$$\mu_R^2 \frac{d}{d\mu_R^2} R\left(\frac{Q^2}{\mu_R^2}, \alpha_S(\mu_R)\right) = \left[\mu_R^2 \frac{\partial}{\partial \mu_R^2} + \mu_R^2 \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu_R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_S} \right] R = 0 \quad (2.55)$$

qui est appelée l'équation du groupe de renormalisation.

Un changement dans l'échelle de renormalisation μ_R est compensée par un changement de la constante de couplage courante laissant R inchangé. Mais ceci n'est vrai que si tous les ordres sont calculés car μ_R apparaît toujours à l'ordre supérieur à celui auquel la variable (ici R) est calculée.

2.4.5 La fonction bêta

La dépendance de la constante de couplage en l'échelle μ_R est appelée la fonction β :

$$\beta(\alpha_S) = \mu_R^2 \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu_R^2}, \quad (2.56)$$

Elle est calculée suivant l'expansion :

$$\begin{aligned} \frac{\beta(\alpha_S)}{4\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\alpha_S}{4\pi}\right)^{n+2} \\ &= \beta_0 \left(\frac{\alpha_S}{4\pi}\right)^2 + \beta_1 \left(\frac{\alpha_S}{4\pi}\right)^3 + \beta_2 \left(\frac{\alpha_S}{4\pi}\right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

Les calculs à une boucle donnent le résultat que nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\left(\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f\right) \\ &= -11 + \frac{2}{3}N_f = -7.67 \quad (\text{pour } N_f = 5) \end{aligned} \quad (2.58)$$

où $N_c = 3$, est le nombre de couleurs et N_f le nombre de saveurs “actives” à l’échelle μ_R .

Les termes suivants peuvent être calculés et valent :

$$\beta_1 = 102 - \frac{38}{3} N_f \quad (2.59)$$

$$\beta_2 = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} N_f + \frac{325}{54} N_f^2 \quad (2.60)$$

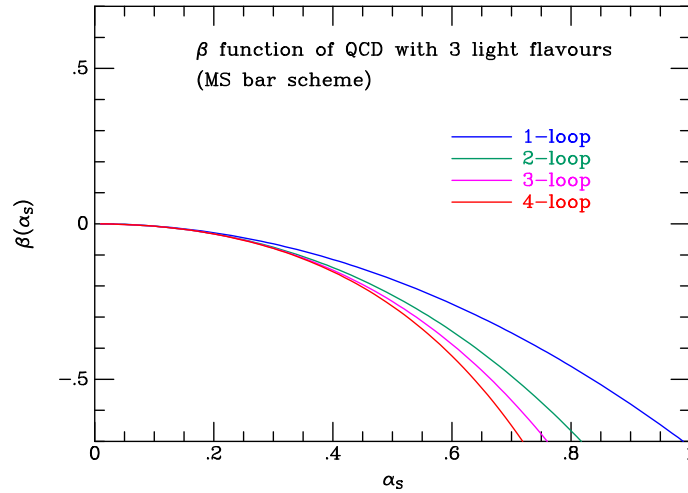


FIGURE 2.4 – La fonction β en fonction de α_s pour un modèle à trois saveurs. On constate bien que plus α_s est petit, moins les ordres supérieurs sont importants.

2.4.6 Le paramètre Lambda

La QCD perturbative nous dit donc comment la constante de couplage forte $\alpha_s(Q)$ dépend de l’échelle (distance à laquelle se passe l’interaction). En revanche sa valeur n’est pas prédite et doit donc être mesurée. Par convention les valeurs mesurées sont comparées à la valeur $Q = M_Z$ de la masse du boson Z, c’est-à-dire bien dans le régime perturbatif.

Le paramètre μ_R reste dans l’expression (2.54) comme une relique du cut-off. Il est utile de définir $\alpha_s(Q)$ en fonction du paramètre dit Λ_{QCD} , l’échelle à laquelle la correction à une boucle fait diverger le développement perturbatif (voir éq (2.49) dans le cas QED) :

$$\Lambda_{QCD}^2 = \mu^2 e^{4\pi/(\beta_0 \alpha_s(\mu^2))} \quad (2.61)$$

qui correspond à la valeur de Q^2 pour laquelle le dénominateur de 2.54 s’annule, soit le terme

$$\Lambda_{QCD}^2 = Q^2 \text{ tel que } \frac{2N_f - 11N_c}{6\pi} \alpha_s(\mu^2) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} = 1. \quad (2.62)$$

Cette grandeur offre l’avantage d’être un choix d’échelle qui représente le pivot entre le perturbatif et non-perturbatif et par conséquent l’énergie à laquelle les équations du groupe de renormalisation cessent d’être valables. Nous avons en effet $\alpha_s(Q) \rightarrow \infty$ quand $Q \rightarrow \Lambda_{QCD}$.

La valeur de Λ_{QCD} n'est pas donnée par la théorie, il faut la mesurer. On s'attend à ce qu'elle soit de l'ordre des masses hadroniques. En partant de la valeur mesurée de $\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0007$ choisie à l'échelle $Q = M_Z = 91.18$ GeV, on obtient que Λ_{QCD} est proche de 0.1 GeV.

2.5 Le confinement

Des quarks isolés n'ont jamais été observés (par exemple en mettant en évidence l'existence de particules aux charges fractionnaires). Nous supposons au contraire que sur un temps long par rapport aux effets quantiques, ils sont toujours confinés au sein des hadrons. Comme nous venons de la voir, la force de liaison entre deux quarks augmente avec la distance qui les sépare.

2.5.1 Etats de couleur du gluon

Les gluons portant une combinaison linéaire de couleurs et une d'anticouleur, on définit 8 états ortho-normés (plusieurs choix sont possibles) : un octet :

$$\begin{aligned} G_1 &= r\bar{g} & G_2 &= r\bar{b} & G_3 &= g\bar{r} & (2.63) \\ G_4 &= g\bar{b} & G_5 &= b\bar{r} & G_6 &= b\bar{g} \\ G_7 &= \sqrt{1/2} \{r\bar{r} - g\bar{g}\} & G_8 &= \sqrt{1/6} \{r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}\} \end{aligned}$$

qui correspond à notre choix de matrices de λ^a de Gell-Mann ; et un singlet :

$$G_0 = \sqrt{1/3} \{r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}\} \quad (2.64)$$

ce dernier ne portant pas de couleur (ou plus exactement étant invariant pour une rotation dans l'espace des couleurs), il ne réalise pas d'interaction forte et doit être exclu, sinon l'interaction forte serait de portée infinie.

Ainsi G_1 , par exemple, transporte du rouge et de l'antivert (ou du vert et de l'antirouge pour un choix arbitraire de flèche opposé.) Si l'on retourne aux générateurs de SU(3), on voit que seuls λ_1 et λ_2 permettent ces rotations. L'expression des matrices λ en fonction des états de couleurs des gluons est facile à retrouver :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= G_1 + G_3 & \lambda_2 &= i(G_3 - G_1) & \lambda_3 &= \sqrt{2} G_7 & \lambda_4 &= G_2 + G_5 \\ \lambda_5 &= i(G_5 - G_2) & \lambda_6 &= G_6 + G_4 & \lambda_7 &= i(G_6 - G_4) & \lambda_8 &= G_8 \end{aligned}$$

2.5.2 Le facteur de couleur

La fonction d'onde d'un quark peut être exprimée comme le produit d'un spineur de Dirac ordinaire et d'une fonction d'onde de couleur (χ_c) :

$$\psi_q^c = \psi_q(x) \chi_c \quad (2.65)$$

avec :

$$\chi_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Regardons la diffusion d'un quark sur un autre quark à l'ordre le plus bas (diagramme de la figure 2.5) :

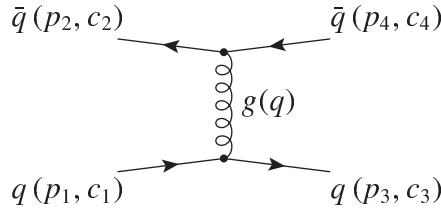


FIGURE 2.5 – Diffusion quark-antiquark à l'ordre le plus bas.

L'élément de matrice correspondant s'écrit :

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}(p_3)\chi_3^\dagger(-i\frac{g}{2}\lambda^a\gamma^\mu)u(p_1)\chi_1] \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2} [\bar{v}(p_2)\chi_2^\dagger(-i\frac{g}{2}\lambda^b\gamma^\nu)v(p_4)\chi_4] \quad (2.67)$$

$$= ig^2 \frac{1}{q^2} [\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)] [\bar{v}(p_2)\gamma_\mu v(p_4)] \underbrace{\frac{1}{4}[\chi_3^\dagger\lambda^a\chi_1][\chi_2^\dagger\lambda_a\chi_4]}_{C_F} \quad (2.68)$$

c'est-à-dire, à la constante de couplage près, la même expression que dans QED pour une diffusion $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ multipliée par un facteur de couleur, C_F

$$C_F = \frac{1}{4}[\chi_3^\dagger\lambda^a\chi_1][\chi_2^\dagger\lambda_a\chi_4]. \quad (2.69)$$

Remarque : cette propriété reste vraie avec un signe opposé pour la diffusion $qq \rightarrow qq$ de saveurs différentes (s'ils sont de même saveur il y a des diagrammes d'annihilation supplémentaires à considérer) et ainsi que pour toutes leurs corrections radiatives où l'on remplace un photon par un gluon.

Exemples : Calculons le facteur de couleur pour la diffusion $q_r q_r \rightarrow q_r q_r$:

$$\begin{aligned} C_F &= \frac{1}{4} \left[(1, 0, 0) \lambda^a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(1, 0, 0) \lambda_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} (\lambda^a)_{11} (\lambda_a)_{22} = \frac{1}{4} [(\lambda^3)_{11} (\lambda^3)_{11} + (\lambda^8)_{11} (\lambda^8)_{11}] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.70)$$

De façon plus rapide on peut voir que cela correspond à l'échange de gluons uniquement dans les états $G_7 = \sqrt{1/2}\{r\bar{r} - g\bar{g}\}$ et $G_8 = \sqrt{1/6}\{r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}\}$. On trouve alors de façon équivalente :

$$C_F = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \right] = \frac{1}{3} \quad (2.71)$$

Remarque : dans l'eq. 2.70 le facteur 1/4 provient de 1/2 comme dans l'eq. 2.71 et de 1/2 provenant de la $Tr(\lambda^a \lambda_a) = 1/2$.

Dans ce cas, la force sera donc répulsive. On vérifie aisément que ce résultat ne dépend pas de la couleur choisie, comme imposé par la symétrie de couleur.

Cas de l'état singulet de quark-antiquark : L'état quark-antiquark singulet de couleur est particulièrement intéressant car il correspond à un méson (attention c'est l'état quark-antiquark qui est singulet de couleur, pas le gluon).

$$q\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_r\bar{q}_{\bar{r}} + q_g\bar{q}_{\bar{g}} + q_b\bar{q}_{\bar{b}}) \quad (2.72)$$

Par symétrie de couleur les trois contributions de couleur doivent être identiques. Cela revient donc à faire le calcul pour une couleur, disons $b\bar{b}$, et multiplier par 3. Le facteur $1/\sqrt{3}$ de 2.72 apparaît dans l'état initial mais aussi dans l'état final, on aura donc :

$$C_F(q\bar{q}) = 3 \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} C_F(q_b\bar{q}_{\bar{b}}) = C_F(q_b\bar{q}_{\bar{b}}) \quad (2.73)$$

Dans ce cas, les échanges de gluons dans les trois états G_8 ($q_b\bar{q}_{\bar{b}} \rightarrow q_b\bar{q}_{\bar{b}}$), G_6 ($q_b\bar{q}_{\bar{b}} \rightarrow q_g\bar{q}_{\bar{g}}$) et G_5 ($q_b\bar{q}_{\bar{b}} \rightarrow q_r\bar{q}_{\bar{r}}$) sont à prendre en compte. Comme dans QED quand on passe d'une particule à une antiparticule, on multiplie par un signe (-1) . Le facteur de couleur vaut donc :

$$C_F(q_b\bar{q}_{\bar{b}}) = \frac{1}{2} \left[\frac{-2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 \right] = -\frac{4}{3} \quad (2.74)$$

Ce qui correspond à une force attractive.

Les différentes valeurs du facteur de couleur pour un état qq et $q\bar{q}$ sont donnés dans cette table :

état des quarks	gluons échangés	C_F
$rr \rightarrow rr$	G_7, G_8	$+1/3$
$r\bar{r} \rightarrow r\bar{r}$	G_7, G_8	$-1/3$
$rb \rightarrow rb$	G_7, G_8	$-1/6$
$rb \rightarrow br$	G_1, G_2	$+1/2$
$r\bar{r} \rightarrow b\bar{b}$	G_1, G_2	$-1/2$
$r\bar{b} \rightarrow r\bar{b}$	G_7, G_8	$+1/6$

Notons enfin que pour un baryon (état qqq neutre de couleur) ou un antibaryon, le facteur de couleur vaut $-2/3$, correspondant à une force attractive.

Dans QED le signe de la force électromagnétique est donné par $e_1 e_2 \alpha$ et correspond à une force répulsive pour une valeur positive (deux charges de même signe) et attractive (si $F = -dV/dr > 0$) pour une valeur négative. De façon équivalente dans QCD, on peut écrire le facteur de couleur $C_F \alpha_s = \frac{1}{2} c_1 c_2 \alpha_s$, où c_1 et c_2 sont les charges de couleur. Le facteur $1/2$ qui aurait pu être absorbé dans la définition de α_s est resté pour des raisons historiques. La force de l'interaction forte sera attractive pour $C_F < 0$ et répulsive pour $C_F > 0$.

2.5.3 Le potentiel

Le potentiel qui, pense-t-on, représente l'interaction QCD entre un quark et un antiquark dans un état de couleur singulet est dit de 'funnel' et donné par :

$$V(r) = C_F \frac{\alpha_s}{r} + kr = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr \quad (2.75)$$

où $k \simeq 0.8 \text{ GeV fm}^{-1}$ est une constante, appelée la tension de la corde (string). Ce potentiel a été intensément utilisé avec succès dans des modèles non relativistes d'états liés $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ et est compatible avec les résultats des calculs (non perturbatifs) de QCD sur réseau (lattice QCD). A petite distance $r \ll 1/k$ le potentiel est coulombien et à grande distance linéaire.

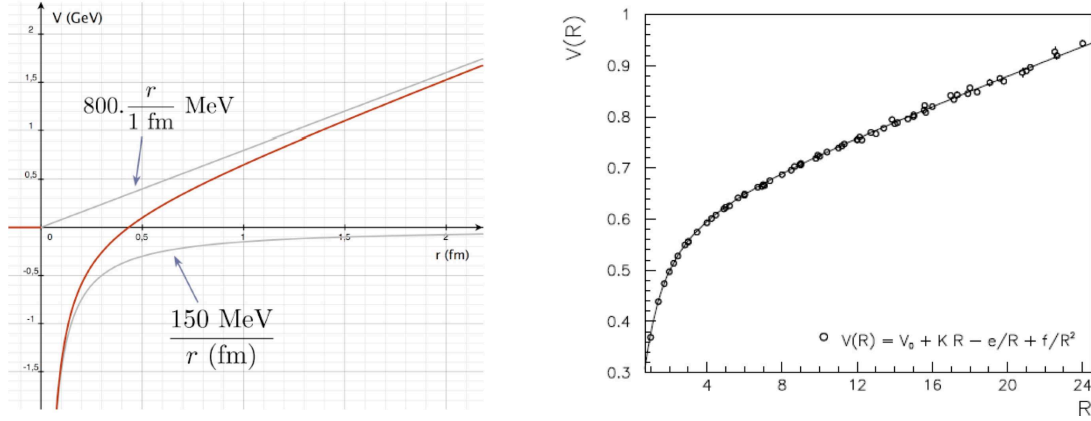


FIGURE 2.6 – Potentiel dit de funnel pour $C_F = -4/3$. Il est comparé (à droite) aux prédictions de calcul sur réseau - Lattice QCD.

La figure de droite compare la courbe du type du funnel (avec un terme correctif en $1/r^2$) et les résultats des calculs de QCD sur réseau (Lattice QCD).

La partie coulombienne est donnée par le propagateur des gluons. En effet une règle bien utile nous dit que, dans l'approximation non-relativiste (c'est-à-dire de masse importante, $q^2 \ll M^2$, où q est relatif au boson échangé et M aux particules cible et projectile), le potentiel est la transformée de Fourier du propagateur du champ de jauge en considérant uniquement sa 3-impulsion, multipliée par les constantes de couplage et $(-i)$ à chacun des deux vertex.

Calculons le pour le couplage fort en considérant deux particules massives de charge g :

$$V(r) = -g^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{-\mathbf{p}^2} \tag{2.76}$$

après intégration sur les angles :

$$V(r) = g^2 \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{\sin(p|r|)}{p|r|}, \tag{2.77}$$

sachant que

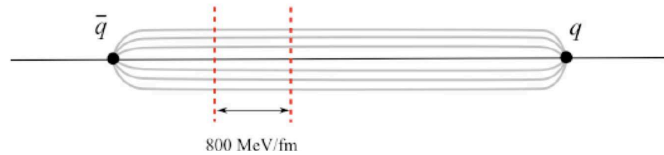
$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{2.78}$$

et posant $x = p|r|$ on retrouve la forme classique du potentiel Coulombien

$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{|r|} = \alpha_S \frac{1}{|r|} \tag{2.79}$$

Le terme linéaire est mis à la main, il correspond au régime non perturbatif et ne peut donc pas être calculé à l'aide des diagrammes de Feynman.

L'explication intuitive de la création de hadrons est la suivante : quand la distance qui sépare une paire quark-antiquark est petite par rapport à la taille typique du confinement, le champ de gluons à la même forme dipolaire qu'un champ électrodynamique classique (potentiel Coulombien). Pour deux charges opposées, il est de plus en plus répulsif quand $r \rightarrow 0$. Quand la distance de séparation devient de l'ordre de la taille du confinement (typiquement 1 fm), les lignes de champs des gluons s'attirent réciproquement, résultant en un tube le long de la ligne quark-antiquark. Un accroissement supplémentaire de la distance de séparation ne change pas la forme du champ de gluon (tube) mais l'allonge en conservant l'énergie par unité de longueur (terme linéaire du potentiel, c'est-à-dire une force constante).



Si la distance augmente au-delà du seuil de production de particules ($m_\pi \simeq 135$ MeV) il y a *fragmentation*.

Chapitre 3

Annihilation électron-positon

Considérons le cas le plus simple et accessible expérimentalement, soit les collisions $e^+ + e^-$. Il nous permettra d'étayer les notions de confinement et de fragmentation mais également de définir celle de *jets* ainsi que de discuter les corrections radiatives QCD et de tester sa structure de jauge.

L'annihilation électron-positon est un processus étudié avec grande attention en physique des particules. Il permet l'étude des aspects électro-faibles et de plus permet toute une série d'études sur différents aspects de QCD ainsi que la recherche de nouvelles particules.

Ce processus possède de nombreux avantages. En particulier, la réaction $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$ présente un état initial clair et non sujet à des interférences entre l'état initial et l'état final ce qui simplifie grandement l'interprétation de l'état final hadronique en termes de QCD. La quadri-impulsion est intégralement transmise à l'état final, en l'absence de radiation QED. Enfin les conditions expérimentales sont en général "propres" dans le sens où il n'y a pas plusieurs événements superposés dans le détecteur ; la section efficace totale faisant intervenir la constante de couplage électro-faible, la probabilité de superposition de deux événements (couplage élevé au carré) reste faible.

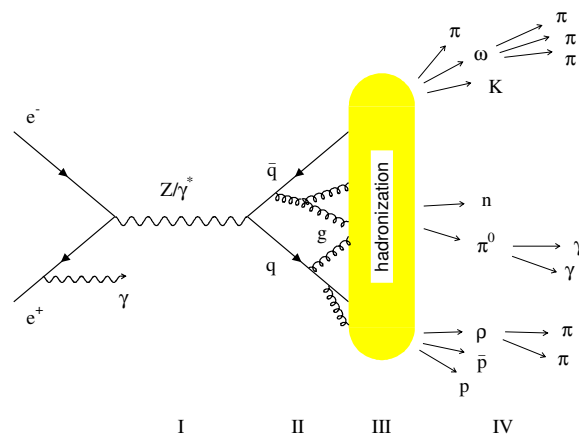
A titre informatif, le tableau 3.1 reprend les accélérateurs qui ont permis l'étude des collisions $e^+ + e^-$ et les expériences qui y furent liées.

3.1 Section efficace totale $e^+ + e^- \rightarrow \text{hadrons}$

La production de hadrons se fait via la production d'une paire $q\bar{q}$ avec une probabilité de 1, par conséquent, nous avons :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = N_c \sum_{i=1}^{N_f} \sigma(e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i) \quad (3.1)$$

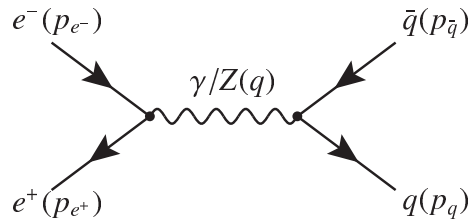
Accélérateur	Lieu	dates	\sqrt{s} [GeV]	Expériences
ACO	LAL Orsay	1973-1988	0.5	M3N
ADONE	INFN Frascati	1969-1993	1 – 3	Boson, $\mu\pi$, $\gamma\gamma$, $\gamma\gamma 2$, MEA
VEPP	Novosibirsk	1994-	1 – 12	VEPP-2
SPEAR	SLAC Stanford	1966-	2 – 8	SLAC-LBL, MARK I, MARK II
PEP	SLAC Stanford	1980-1990	29	MARK II, HRS, TPC/2 γ , MAC
DORIS	DESY Hambourg	1974-1993	3 – 11	PLUTO, DASP, LENA, DH(HM)
CESR	Cornell, U.S.A.	1979-	3 – 12	CLEO, CUSB
PETRA	DESY Hambourg	1978-1986	12 – 47	CELLO, JADE, MARK J, PLUTO, TASSO
TRISTAN	KEK Tsukuba	1986-1995	50 – 64	TOPAZ, VENUS, AMY
SLC	SLAC Stanford	1989-1998	\approx 88 – 93	MARK II, SLD
LEP	CERN Genève	1989-2000	88 – 209	ALEPH, DELPHI, L3, OPAL
PEP-II	SLAC	1999-2008	11	BaBar
KEKB	KEK, Japon	1999-	11	Belle I + II
BEPC	IHEP, Chine	1989-	2.2-4.6	BES
DAΦNE	Frascati, Italie	1999-	1.02	KLOE
superKEKB	KEK, Japon	2018-	11	Belle II

TABLE 3.1 – Principaux collisionneurs e^+e^- et expériences liées.

La production d'une paire de quarks (de spin 1/2) suite à l'annihilation d'un électron et d'un positon en un photon :

$$e^+(p_{e^+}) + e^-(p_{e^-}) \rightarrow \gamma^*(q) \rightarrow q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}}). \quad (3.2)$$

est identique à toute autre production d'une paire de fermion-antifermion :



en adaptant simplement les charges électriques (charge fractionnaire Q_i pour les quarks de saveur i) et en rajoutant le facteur de couleur, N_c . La section efficace, en négligeant pour l'instant l'échange de Z , est donnée par l'expression :

$$d\sigma = \frac{1}{2s} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\Gamma \quad (3.3)$$

$$d\Gamma = \frac{d^3p_q}{(2\pi)^3 2p_q^0} \frac{d^3p_{\bar{q}}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{q}}^0} (2\pi)^4 \delta(p_{e^+} + p_{e^-} - p_q - p_{\bar{q}}) \quad (3.4)$$

où s est le carré de l'énergie dans le centre de masse $s = q^2 = (p_{e^+} + p_{e^-})^2 = (p_q + p_{\bar{q}})^2$. Le carré de l'amplitude invariante est moyennée sur les spins des 2 particules entrantes et sommée des deux particules sortantes :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{\mathcal{M}\mathcal{M}^*} = \frac{1}{2} \sum_{s_{e^+}} \frac{1}{2} \sum_{s_{e^-}} \sum_{s_q, s_{\bar{q}}} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.5)$$

En appliquant les règles de Feynman :

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p_{e^+})(-ie\gamma^\mu)u(p_{e^-}) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_q)(-iQ_i e\gamma^\nu)v(p_{\bar{q}}) \quad (3.6)$$

$$= \frac{iQ_i e^2}{q^2} \bar{v}(p_{e^+})\gamma^\mu u(p_{e^-}) \bar{u}(p_q)\gamma_\mu v(p_{\bar{q}}) \quad (3.7)$$

Pour trouver le complexe conjugué de \mathcal{M} , remarquons que par exemple le produit $\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$ est une matrice 1x1 et donc son complexe conjugué est égale à son hermitien conjugué et donc :

$$[\bar{\psi}\gamma^\mu\chi]^* = [\dots]^\dagger = [\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\chi]^\dagger = \chi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger\psi = \chi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \bar{\chi}\gamma^\mu\psi \quad (3.8)$$

en utilisant les propriétés $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ et $\gamma^0\gamma^0 = 1$. Dans le cas présent, on a donc :

$$i\mathcal{M}^* = \frac{iQ_i e^2}{q^2} \bar{u}(p_{e^-})\gamma^\nu v(p_{e^+}) \bar{v}(p_{\bar{q}})\gamma_\nu u(p_q) \quad (3.9)$$

En multipliant 3.7 par 3.9, en moyennant sur les spins des électrons et en sommant sur ceux des quarks, on regroupe les termes de l'état initial et de l'état final et en utilisant les relations de fermeture du type :

$$\sum_s u(p_q)\bar{u}(p_q) = \not{p}_q + m_q \quad (3.10)$$

$$\sum_s v(p_{\bar{q}})\bar{v}(p_{\bar{q}}) = \not{p}_{\bar{q}} - m_q \quad (3.11)$$

ce qui donne par exemple :

$$\sum_{s_q, s_{\bar{q}}} \bar{u}(p_q) \gamma_\mu \nu (p_{\bar{q}}) \bar{\nu}(p_{\bar{q}}) \gamma_\nu \mu (p_q) = \text{Tr} \left((\not{p}_q + m_q) (\not{p}_{\bar{q}} - m_q) \gamma_\mu \gamma_\nu \right) \quad (3.12)$$

$$= 4(p_q)^\rho (p_{\bar{q}})^\sigma (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma}) - 2m_q^2 g_{\mu\nu} \quad (3.13)$$

$$= 4 \left((p_q)_\mu (p_{\bar{q}})_\nu - p_q \cdot p_{\bar{q}} g_{\mu\nu} + (p_q)_\nu (p_{\bar{q}})_\mu - m_q^2 g_{\mu\nu} \right). \quad (3.14)$$

Le fait que l'on trouve une trace vient naturellement lorsqu'on prend la peine d'écrire tous les indices et où l'on a utilisé la propriété $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu})$. Les termes linéaires en m_q sont multipliés par des traces d'un produit impaire de matrices gamma, donc de trace nulle. Seul le terme de masse en m_q^2 subsiste et $\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$.

Le terme leptonique donne un résultat similaire. Il suffit de remplacer $q \rightarrow e^-$, $\bar{q} \rightarrow e^+$ et $m_q \rightarrow m_e$, d'inverser les indices μ et ν et de les monter :

$$4 \left((p_{e^-})^\nu (p_{e^+})^\mu - p_{e^-} \cdot p_{e^+} g^{\nu\mu} + (p_{e^-})^\mu (p_{e^+})^\nu - m_e^2 g^{\nu\mu} \right). \quad (3.15)$$

On obtient, en rajoutant une somme sur les couleurs (facteur N_c), en tenant compte du facteur 1/4 de la moyenne des états de spins des particules entrantes et en remarquant que $s = q^2$:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8 \frac{e^4}{s^2} N_c Q_i^2 \{ (p_{e^+} \cdot p_q)(p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}}) + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})(p_{e^-} \cdot p_q) + m_q^2 (p_{e^+} \cdot p_{e^-}) + m_e^2 (p_q \cdot p_{\bar{q}}) + 4m_q^2 m_e^2 \} \quad (3.16)$$

Les termes de masse sont des constantes :

$$m_q^2 (p_{e^+} \cdot p_{e^-}) + m_e^2 (p_q \cdot p_{\bar{q}}) + 4m_q^2 m_e^2 = \frac{s}{2} (m_q^2 + m_e^2) - 2m_q^2 m_e^2 + 4m_q^2 m_e^2 = \frac{s}{2} (m_q^2 + m_e^2) + 2m_q^2 m_e^2. \quad (3.17)$$

En négligeant toutes les masses devant les impulsions (impliquant $p_{e^+}^2 = p_{e^-}^2 = p_q^2 = p_{\bar{q}}^2 = 0$ et $(p_{e^-} + p_q)^2 = 2 p_{e^-} \cdot p_q$ et en faisant comme choix de référentiel le système du centre de masse et en choisissant l'axe z suivant l'axe des faisceaux, d'énergie, E_b (collision frontale), et en posant $\alpha = e^2/4\pi$, on peut réécrire la section efficace sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} N_c Q_i^2 (1 + \cos^2\theta) \quad (3.18)$$

où θ est l'angle polaire de diffusion par rapport au centre de masse¹.

Remarquons qu'une expression identique (mise à part la valeur de la charge électrique) est obtenue pour la diffusion $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$, pour laquelle la dépendance en $(1 + \cos^2\theta)$ est mesurée précisément - voir mesure de la Collaboration TASSO à la figure 3.1.

A très haute énergie (limite ultra relativiste $\beta \rightarrow 1$ pour les quarks émis, donc aussi loin des résonances), les interactions entre quarks de l'état final peuvent être négligées (principe de causalité) et la section efficace est donnée par :

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 = N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \frac{86.8\text{nb}}{s[\text{GeV}^2]} \quad (3.19)$$

où la somme porte sur les N_f saveurs qui contribuent à la section efficace, c'est-à-dire tels que : $2m_f < \sqrt{s}$, m_f étant la masse du quark de saveur f . Ici nous avons négligé tous les autres effets dus aux masses des quarks, supposées petites par rapport à \sqrt{s} .

1. les détails de cette étape du calcul sont donnés par exemple dans le Halzen et Martin, page 131

Par commodité, définissons le rapport :

$$R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \quad (3.20)$$

$$= \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/(4\pi\alpha^2/3s) \quad (3.21)$$

$$= N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad (3.22)$$

La commodité ici est tant théorique (expression plus simple, libérée de facteurs inintéressants pour notre propos) qu'expérimentale car si les conditions permettent de mesurer directement ce rapport, bon nombre d'incertitudes expérimentales s'annulent dans le rapport (en particulier les mesures des valeurs absolues des deux sections efficaces dépendent de la même façon de la mesure de la luminosité).

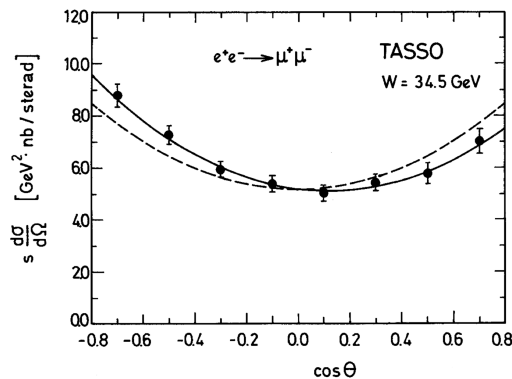


FIGURE 3.1 – Section efficace différentielle $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mesurée par TASSO au collisionneur PETRA ($\sqrt{s} = 34.5$ GeV) à DESY. Les mesures sont comparées à une dépendance en $(1 + \cos^2 \theta)$ (ligne discontinue) pour l'échange d'un photon et une dépendance qui prend en compte l'échange du boson Z et l'asymétrie avant-arrière qu'il entraîne [Z. Phys. C 22 (1984) 13].

Pour $\sqrt{s} < 3$ GeV, seuls les quarks u , d et s contribuent et pour $N_c = 3$, nous avons :

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] \quad (3.23)$$

$$= 2. \quad (3.24)$$

Dans le domaine $4 < \sqrt{s} < 9$ GeV, le c contribue également, impliquant $R = 10/3$, au-delà, le quark b implique $R = 11/3$.

La comparaison aux mesures expérimentales confirme la valeur de $N_c = 3$ (voir figures 3.2 et 3.3). Ces estimations correspondent principalement au comptage des degrés de liberté impliqués à une énergie donnée. On remarque que notre prédiction n'est valable que lorsqu'on s'écarte des résonances $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ et que notre prédiction est meilleure aux plus hautes énergies (au-delà de 2 GeV). Aux énergies inférieures à 2 GeV et dans les régions de résonances, les effets d'hadronisations sont importants. De plus aux basses énergies la constante de couplage forte est plus grande (se rapproche de l'unité) impliquant des corrections radiatives QCD plus importantes voire même des effets non perturbatifs.

Les résonances correspondent à la production exclusive d'un méson vecteur : $e^+ + e^- \rightarrow VM$, où $VM = \rho, \omega, \phi, J/\Psi, \Upsilon, \dots$. Si une seule particule hadronique est créée, par conservation des spin et parité du photon ($J^P = 1^-$), il doit s'agir d'un méson (paire $q\bar{q}$) vecteur (spin 1) de parité négative (les mésons 1^+

sont appelés pseudo-vecteurs).

Nous discuterons l'approche du pic du Z un peu plus loin dans ce chapitre.

3.2 Création d'une paire quark-antiquark

Dans le système du centre de masse, le quark et l'antiquark possèdent la même énergie et des impulsions opposées (suivant chaque direction). Ils sont créés au même point de l'espace et s'éloignent l'un de l'autre. Quand leur distance de séparation devient proche du rayon de confinement ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) le champ de couleur de la paire peut être représenté par un tube (comme un ressort). En continuant à se séparer l'énergie potentielle du tube augmente et celle cinétique des quarks diminue. Lorsque le tube a suffisamment d'énergie potentielle, c'est-à-dire supérieure à la masse d'une paire $q\bar{q}$, une nouvelle paire $q\bar{q}$ est créée qui écrante la couleur de la paire initiale. La couleur doit être conservée à chaque vertex et de façon globale après un temps qui est celui de l'hadronisation. Par exemple :

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow q_v + \bar{q}_v \rightarrow q_v + \bar{q}_v \dots q_v + \bar{q}_v \quad (3.25)$$

Si l'impulsion relative d'un quark par rapport à l'autre au sein de ces paires est suffisamment grande les tubes se fragmentent encore, et ainsi de suite. Une *cascade* de partons est ainsi produite, c'est-à-dire des quarks et des gluons en grand nombre avec progressivement moins d'énergie. Si l'énergie disponible dans le centre de masse est grande, ce phénomène de neutralisation de la couleur n'apparaîtra qu'en fin de processus, c'est-à-dire lorsque l'on s'approche de l'échelle d'hadronisation.

A haute énergie (disons $E \gg m_p$, où m_p est la masse du proton) le tube initial possède une grande impulsion longitudinale (prenons l'axe z définissant la direction longitudinale suivant le quark initial q), p_L et une impulsion transverse limitée, $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \sim m_p$. Par conséquent, les partons produits possèdent des impulsions principalement longitudinales.

Après la production en cascade, les quarks se recombinent en des états neutres de couleurs (seuls états observables) c'est-à-dire des hadrons. Cette transition n'induit pas de transfert d'impulsion transverse important (on dit que c'est un processus *soft*). Cette hypothèse souvent appelée la *dualité parton-hadron* a pour conséquence que les hadrons produits sont proches dans l'espace des phases des partons qui sont à leur origine. Les hadrons produits sont collimés dans deux petits domaines angulaires, c'est ce qu'on appelle des *jets*, et opposés l'un à l'autre.

Le mécanisme de formation de jets que nous avons décrit ci-dessus est composé d'étapes successives dans le temps. Ceci peut être justifié par le fait que différentes échelles de temps interviennent. En utilisant les variables conjuguées de temps et d'énergie :

- le processus partonique (désintégration du photon ou du Z) se déroule sur une échelle de temps :

$$t_p \sim \frac{1}{\sqrt{s}} \quad (3.26)$$

- le temps caractéristique de l'hadronisation :

$$t_h \sim \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \sim \tau = 10^{-23} \text{ sec} \quad (3.27)$$

R in Light-Flavor, Charm, and Beauty Threshold Regions

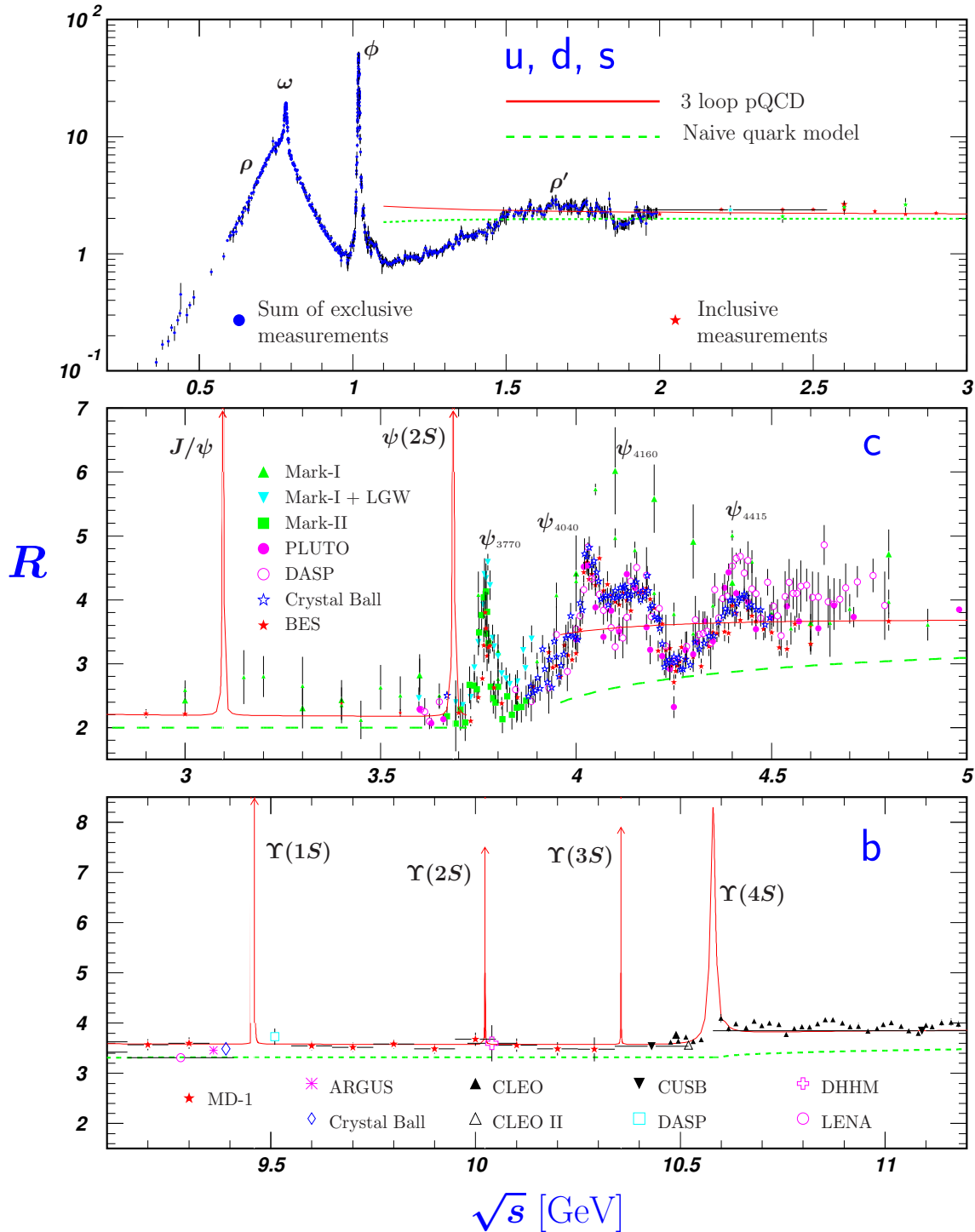


Figure 40.7: R in the light-flavor, charm, and beauty threshold regions. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are the same as in Fig. 40.6. **Note:** CLEO data above $\Upsilon(4S)$ were not fully corrected for radiative effects, and we retain them on the plot only for illustrative purposes with a normalization factor of 0.8. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. The computer-readable data are available at <http://pdg.ihep.su/xsect/contents.html> (Courtesy of the COMPAS(Protvino) and HEPDATA(Durham) Groups, August 2005.) See full-color version on color pages at end of book.

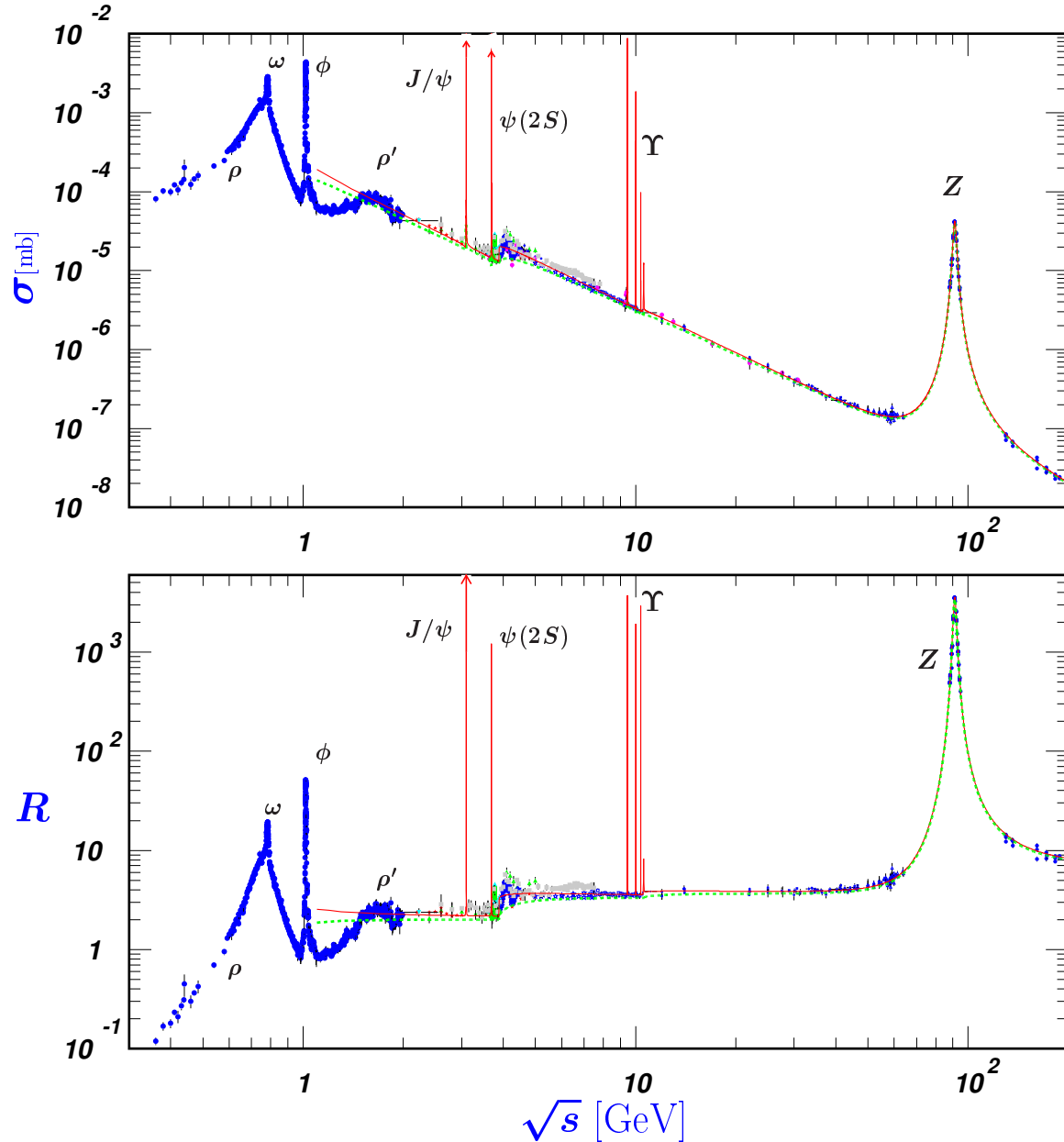
σ and R in e^+e^- Collisions

Figure 40.6: World data on the total cross section of $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ and the ratio $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}, s)$ is the experimental cross section corrected for initial state radiation and electron-positron vertex loops, $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s) = 4\pi\alpha^2(s)/3s$. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are an educative guide: the broken one (green) is a naive quark-parton model prediction and the solid one (red) is 3-loop pQCD prediction (see “Quantum Chromodynamics” section of this Review, Eq. (9.12) or, for more details, K. G. Chetyrkin *et al.*, Nucl. Phys. **B586**, 56 (2000) (Erratum *ibid.* **B634**, 413 (2002)). Breit-Wigner parameterizations of J/ψ , $\psi(2S)$, and $\Upsilon(nS), n = 1, 2, 3, 4$ are also shown. The full list of references to the original data and the details of the R ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. Corresponding computer-readable data files are available at <http://pdg.ihep.su/xsect/contents.html>. (Courtesy of the COMPAS(Protvino) and HEPDATA(Durham) Groups, August 2005. Corrections by P. Janot (CERN) and M. Schmitt (Northwestern U.)) See full-color version on color pages at end of book.

où τ est le temps de vie typique d'une résonance (désintégration forte). A haute énergie

$$\sqrt{s} \gg \Lambda_{QCD} \Rightarrow t_p \ll t_h, \quad (3.28)$$

en d'autres termes : l'hadronisation se déroule longtemps après la processus partonique.

Cette approche de factorisation en temps nous permet de comprendre aussi pourquoi à basse énergie (s petit) les effets d'hadronisation sont importants. Si le temps de l'interaction n'est pas petit devant le temps de l'hadronisation, l'émission de gluons supplémentaires, par exemple, se déroulerait "en même temps" que l'hadronisation, mêlant alors les effets perturbatifs (à supposer qu'ils le soient) et les effets non perturbatifs (hadronisation).

3.3 La formation de jets

Le mécanisme de formation de jets interdit, par exemple, qu'un quark de quadri-impulsion p d'un jet se combine avec un quark de quadri-impulsion p' de l'autre jet tel que $p \cdot p' \gg \Lambda_{QCD}^2$. Ce qui revient à dire que si la masse invariante formée par ces deux quarks est grande par rapport à Λ_{QCD}^2 , ils doivent appartenir à deux jets différents. La transition des jets de partons en jets de hadrons conserve, par conséquent, les distributions des impulsions longitudinale et transverse.

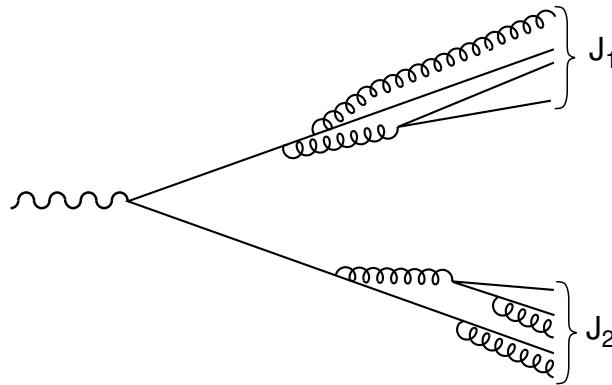


FIGURE 3.4 – Illustration du mécanisme de formation de jets partoniques

On peut donc remonter successivement de l'information des jets hadroniques, vers les jets partoniques et ensuite vers la paire $q\bar{q}$ d'origine. Les données expérimentales confirment cette approche qualitative (voir figure 3.6).

Ces considérations permettent de se rendre compte que les jets sont des objets universels de grande importance dans les interactions à haute énergie.

Les dépendances angulaires de la production de deux jets sont en bon accord avec l'équation 3.68, comme l'attestent les résultats du LEP de la figure 3.5, ce qui confirme à la fois le fait que les quarks sont de spin 1/2 et le mécanisme de production de jets décrit ci-dessus. De plus cette figure compare la distribution angulaire des jets mesurés dans le détecteur (donc au niveau hadronique) à celle des jets simulés au niveau partonique. L'excellent accord est remarquable et très important. Il valide l'approche qui permet donc de remonter à l'information au niveau partonique à partir des mesures hadroniques.

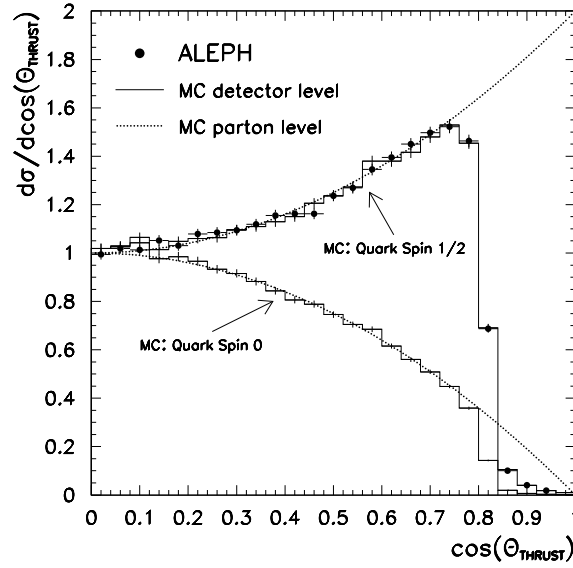


FIGURE 3.5 – Section efficace de jet en fonction du cosinus de l'angle. Le comportement attendu pour les particules de spin 1/2, soit $(1 + \cos^2\theta)$ est très nettement favorisé par rapport à celui attendu pour un spin 0, soit $(1 - \cos^2\theta)$ [ALEPH Coll. Phys. Rept. 294 (1998) 1]

Si un gluon énergétique est produit à grand angle par rapport à la paire d'origine (un *gluon dur*), suivant un processus à l'ordre supérieur en α_s , un troisième jet est formé (voir le diagramme de la figure 3.7 et l'événement observé au LEP à la figure 3.6 de droite).

3.4 Le pic du Z et haute énergie

Les expériences auprès des accélérateurs LEP du CERN et SLD au SLAC ont opéré à des énergies sur le pic de production du boson Z, i.e. $\sqrt{s} = M_Z$ (où M_Z est la masse du Z). L'hypothèse tenue jusqu'alors de considérer le seul photon n'est clairement plus valable. On peut même négliger la contribution du photon ainsi que celle de l'interférence entre le photon et le Z. La section efficace s'exprime alors comme :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2 k^2}{2\Gamma_Z^2} \left[(1 + \cos^2\theta)(a_e^2 + v_e^2)(a_f^2 + v_f^2) + 8\cos\theta a_e v_e a_f v_f \right] \quad (3.29)$$

où

$$k = \frac{\sqrt{2}G_F M_Z^2}{4\pi\alpha} = 1.40 \quad (3.30)$$

k représente le rapport sans dimension des couplages faible sur électromagnétique, sa valeur numérique est donnée ici pour $\alpha(M_Z) = 1/128$. G_F est la constante de Fermi, α la constante de structure fine et Γ_Z la largeur du boson Z. v_f et a_f sont les couplages vectoriel et axial du Z aux fermions, ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} v_f &= I_{3f} - 2Q \sin^2\theta_W \\ a_f &= I_{3f} \end{aligned} \quad (3.31)$$

où θ_W est l'angle de Weinberg et I_{3f} la composante z de l'isospin faible.

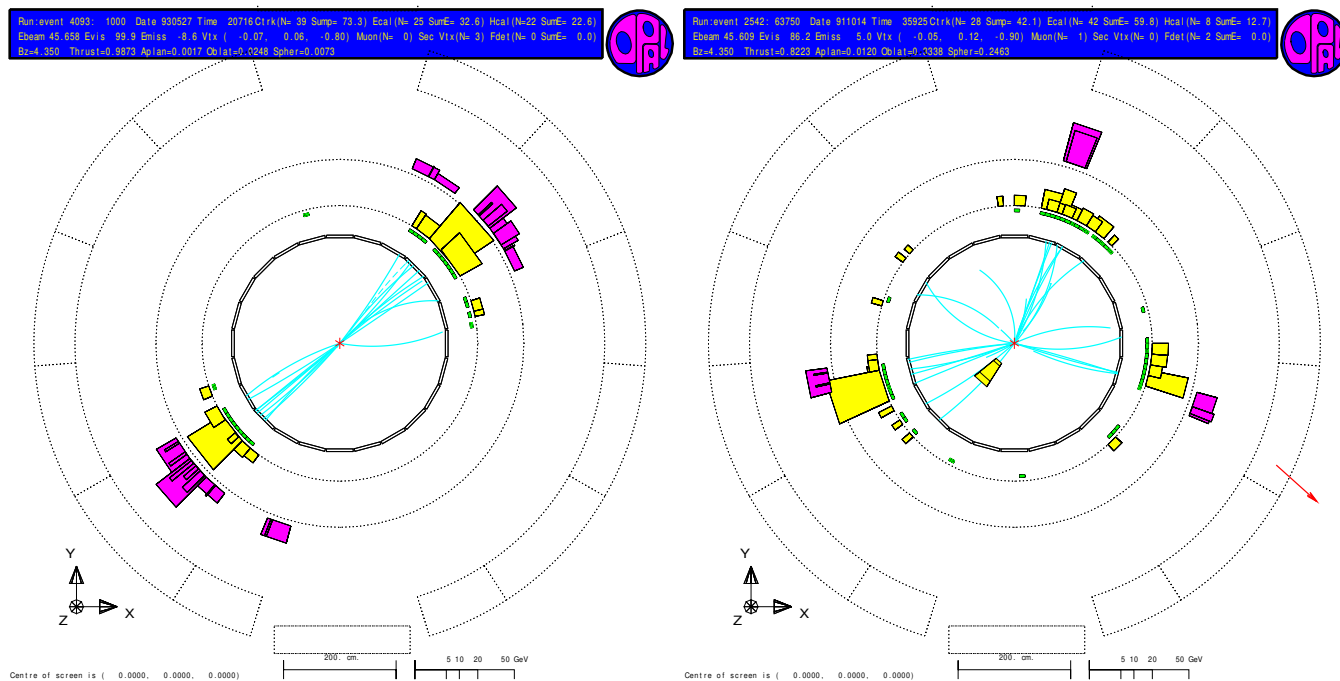


FIGURE 3.6 – Événement à deux jets (à gauche) et à trois jets (à droite) de la désintégration hadronique d'un boson Z vu dans le détecteur OPAL du collisionneur e^+e^- LEP. Vue transverse. Les rectangles jaunes (roses) représentent les dépôts d'énergie électromagnétiques (hadroniques).

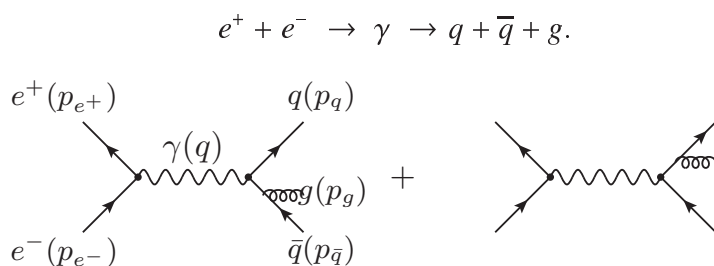


FIGURE 3.7 – Diagrammes à l'origine de la création de 3 jets

	fermions			Q	I_{3f}	$2v_f$	$2a_f$
leptons	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	0	1/2	1	-1
				-1	-1/2	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$	1
quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	2/3	1/2	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	-1
				-1/3	-1/2	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	1

Les facteurs v_e et a_e sont les valeurs particulières de v_f et a_f pour l'électron.

La distribution angulaire présente une contribution supplémentaire en $\cos \theta$ produite par l'interférence entre les contributions aux amplitudes des courants vecteur et axial. Ce terme induit une différence entre le nombre d'événements produits dans les hémisphères du fermion ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) et de l'antifermion ($\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$). Cet effet est appelé l'asymétrie avant-arrière et est générée par la violation de la parité dans les interactions faibles.

Revenons à la section efficace dans la région du pic du Z . Calculons la section efficace à la résonance $E = M_Z$ en intégrant 3.29 sur θ :

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 k^2}{3\Gamma_Z^2} (a_e^2 + v_e^2)(a_f^2 + v_f^2) \quad (3.32)$$

L'émission de photons réels par les électron et positon initiaux étale et déplace légèrement le pic. L'expression de la section efficace devrait en être corrigée. En revanche, comme la production d'une paire $\mu^+\mu^-$ subit les mêmes effets de corrections radiatives QED, cet effet s'annule dans le rapport R .

Sur le pôle de la masse du Z , on remplace le rapport des sections efficaces par le rapport des largeurs :

$$R_Z = \frac{\Gamma(Z \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \frac{\sum_{f=1}^5 (a_q^2 + v_q^2)}{a_\mu^2 + v_\mu^2} = 20.09 \quad (3.33)$$

où pour la valeur numérique, nous avons pris $\sin^2 \theta_W = 0.2315$. La valeur expérimentale est $R_{exp} = 20.80 \pm 0.035$. La valeur théorique ici estimée est légèrement inférieure, dû à l'absence de corrections radiatives QCD (principalement l'échange de gluons supplémentaires). Une comparaison de ce rapport entre sa mesure et sa prédiction théorique permet de déduire α_s .

Remarquons que la valeur de R est ici (i.e. pic du Z) sensiblement supérieure à celles mesurées à plus basse énergie. Ceci est dû au fait que les charges faibles des quarks sont comparables à celle des muons tandis que leurs charges électriques sont inférieures (qui seront élevées au carré). Au-delà du pic du Z les contributions de l'échange de photon et du boson Z , ainsi que leur interférence, sont à prendre en compte, la valeur de R retombera donc un petit peu.

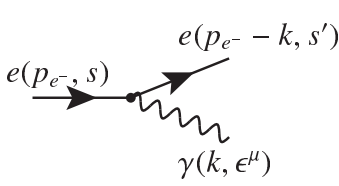
3.5 Corrections radiatives QED

La simplicité de la mesure d'une section efficace et même la simplicité de sa définition s'éloignent au fur et à mesure que l'on gagne en précision. Un des effets importants est appelé *les corrections radiatives*. Il s'agit de la prise en compte d'effets dus aux ordres supérieurs (QED, QCD ou même faibles) comportant ou non des particules supplémentaires dans l'état initial et/ou final.

Chaque particule chargée pouvant émettre, par exemple, un ou plusieurs photons, comment traiter ces radiations ?

3.5.1 Radiation par l'électron et le positon incidents

L'amplitude pour laquelle la radiation d'un photon, d'impulsion k et possédant un vecteur de polarisation ϵ^μ , est émise par l'électron incident, d'impulsion p_{e^-} et de spin s , s'obtient en remplaçant le spineur $u(p_{e^-}, s)$ par :



$$i \mathcal{M} = \dots i \frac{\not{p}_{e^-} - \not{k} + m_e}{(p_{e^-} - k)^2 - m_e^2} (-ie\gamma_\mu) u(p_{e^-}, s) \epsilon^\mu \quad (3.34)$$

$$= \dots \frac{\not{p}_{e^-} - \not{k} + m_e}{-2p_{e^-} \cdot k} e \not{\epsilon} u(p_{e^-}, s) \quad (3.35)$$

où l'on a utilisé la relation $(p_{e^-} - k)^2 = m_e^2 - 2p_{e^-} \cdot k$. Dans l'approximation des photons mous, on peut négliger k devant p_{e^-} . A l'aide de la relation générale de permutation $\not{p}\not{q} = -\not{q}\not{p} + 2p \cdot q$, on a :

$$i \mathcal{M} = \dots - e \frac{\not{p}_{e^-} + m_e}{2p_{e^-} \cdot k} \not{\epsilon} u(p_{e^-}, s) \quad (3.36)$$

$$= \dots \frac{-e}{2p_{e^-} \cdot k} (-\not{\epsilon} \cdot \not{p}_{e^-} + 2p_{e^-} \cdot \epsilon + m_e \not{\epsilon}) u(p_{e^-}, s) \quad (3.37)$$

$$= \dots \frac{-e}{2p_{e^-} \cdot k} (2p_{e^-} \cdot \epsilon - \not{\epsilon}(\not{p}_{e^-} - m_e)) u(p_{e^-}, s) \quad (3.38)$$

$$= \dots - e \frac{\epsilon \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} u(p_{e^-}, s) \quad (3.39)$$

où on a simplifié la relation par l'usage de l'équation de Dirac $(\not{p} - m)u(p, s) = 0$ pour une particule entrante (de même on a $(\not{p} + m)v(p, s) = 0$ pour une sortante, $\bar{u}(\not{p} + m) = 0$ et $\bar{v}(\not{p} - m) = 0$ pour les antiparticules entrante et sortante).

Pour la radiation par le positon, la situation est identique mis à part l'emploi du spineur de Dirac \bar{v} au lieu du u et, le positon arrivant en direction opposée à l'électron, le vecteur polarisation $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ (le photon étant réel, il n'a que des composantes spatiales $\epsilon = (0, \vec{\epsilon})$) et donc :

$$i \mathcal{M} = e \frac{\epsilon \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} \bar{v}(p_{e^+}, s) \dots \quad (3.40)$$

En considérant les deux sources, la correction à l'amplitude à l'ordre le plus bas, \mathcal{M}_{born} est :

$$i \mathcal{M}_{rad} = e \left(\frac{\epsilon \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{\epsilon \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right) i \mathcal{M}_{born} \quad (3.41)$$

Cette factorisation est remarquable et peut s'appliquer pour un nombre l de photons

$$i \mathcal{M}_{l, rad} = \prod_{i=1}^l \left[e \left(\frac{\epsilon_i \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k_i} - \frac{\epsilon_i \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k_i} \right) \right] i \mathcal{M}_{born} \quad (3.42)$$

Limitons nous à la radiation d'un seul photon mou par une particule chargée initiale. La section efficace s'exprime dès lors :

$$d\sigma = e^2 \left[\frac{\epsilon \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{\epsilon \cdot p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \cdot d\sigma_{born} \quad (3.43)$$

où k_0 est la composante énergie du quadri-vecteur k . En sommant sur les états de polarisation du photon (celui-ci étant réel, il est polarisé uniquement transversalement et d'hélicité ± 1), à l'aide des identités de Ward, on obtient un facteur 2, et :

$$d\sigma = e^2 \left[\frac{p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3 k_0} d\sigma_{born} . \quad (3.44)$$

Cette expression met en évidence la structure en double pôle qui correspondent à l'émission colinéaire au positon (terme $p_{e^+}/p_{e^+} \cdot k$) et à l'électron (terme $-p_{e^-}/p_{e^-} \cdot k$). Les divergences infrarouges correspondantes ($k \rightarrow 0$) sont annulées, comme on le verra, par la prise en compte de la correction de vertex (qui se factorise aussi).

Remarquons que l'effet de l'émission d'un photon par une des particules entrantes peut être vue comme une diminution de l'impulsion de cette particule et donc simplement comme une diminution de l'énergie disponible dans le centre de masse s

$$s = (p_{e^-} + p_{e^+})^2 = 4E_{e^-}E_{e^+} \quad (3.45)$$

sans autre effet. Ceci est rendu possible par la factorisation des facteurs de radiation. Cette approche est correcte même pour l'émission de photons énergétiques (ou photons durs). On pose p'_{e^-} la quadri-impulsion de l'électron après radiation :

$$p'_{e^-} = p_{e^-} - k \quad s' = 4(E_{e^-} - k_0)E_{e^+} \quad (3.46)$$

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}\gamma} = \frac{1}{2s} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{d^3p_q}{(2\pi)^3 2p_q^0} \frac{d^3p_{\bar{q}}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{q}}^0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} (2\pi)^4 \delta(p_{e^+} + p_{e^-} - p_q - p_{\bar{q}} - k) \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} &\simeq e^2 \left[\frac{p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3 k^0} * \frac{1}{2s'} |\overline{\mathcal{M}_{born}}|^2 \\ &\frac{d^3p_q}{(2\pi)^3 2p_q^0} \frac{d^3p_{\bar{q}}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{q}}^0} (2\pi)^4 \delta(p_{e^+} + p'_{e^-} - p_q - p_{\bar{q}}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Regardons de plus près le comportement (pôle) à petit angle (radiation colinéaire).

$$\left[\frac{p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} - \frac{p_{e^-}}{p_{e^-} \cdot k} \right]^2 = -2 \frac{p_{e^-} \cdot p_{e^+}}{(p_{e^-} \cdot k)(p_{e^+} \cdot k)} \quad \text{et} \quad p_{e^-} \cdot k = E_b k_0 - \vec{p}_{e^-} \cdot \vec{k} = E_b k_0 [1 - \cos \theta] \quad (3.49)$$

où θ est l'angle entre l'électron p_{e^-} et le photon k . Pour des petits angles $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$, $d \cos \theta \sim d\theta^2$, soit $1 - \cos \theta \simeq \theta^2/2$ et donc :

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}\gamma} \sim \frac{p_{e^-} \cdot p_{e^+}}{p_{e^+} \cdot k} \frac{d\theta^2}{E_b k_0 \theta^2/2} \quad \rightarrow \quad d\sigma \sim \frac{d\theta^2}{\theta^2} \quad (3.50)$$

La divergence est semblable dans le cas de l'émission colinéaire au positon. L'angle minimal n'atteint pas zéro grâce à la masse non nulle de l'électron (et imposée par la conservation à la fois de l'énergie et de l'impulsion). En effet un électron d'impulsion p , émettant un photon réel d'impulsion k ne pourra rester sur sa couche de masse en l'absence d'autre interaction. L'angle de diffusion minimum est donné par le facteur de Lorentz de la relativité restreinte :

$$\theta_{min} \sim 1/\gamma \quad \text{où} \quad \gamma = E/m_e = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \gg 1 \quad (3.51)$$

Remarquons que plus la particule est massive plus l'angle minimal d'émission est grand. Ceci explique pourquoi les électronsradient beaucoup plus d'énergie que les muons. Ce phénomène est également observé dans QCD dans la radiation de gluons par les quarks lourds. C'est ce qu'on appelle l'effet du *dead cone* : il y a un angle mort autour de la direction du quark lourd dans lequel il n'y a pas de radiation (le calcul ne peut plus se faire dans l'approximation hyper relativiste que nous avons utilisée, mais $p_{e^-} \cdot k = E_b k_0 (1 - \beta \cos \theta)$ dans 3.49 ce qui modifie la structure du pôle colinéaire).

Après intégration sur l'angle et pour un photon portant une fraction d'impulsion $z = k/p$:

$$d\sigma = \frac{\alpha}{\pi} \frac{dz}{z} \ln\left(\frac{E_b^2}{m_e^2}\right) \cdot d\sigma_{born}. \quad (3.52)$$

Si l'on ne néglige plus k devant p , l'expression de la section efficace s'écrit :

$$d\sigma = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz}{z} \left(1 + (1-z)^2\right) \ln\left(\frac{E_b^2}{m_e^2}\right) \cdot d\sigma_{born}. \quad (3.53)$$

On l'appelle l'approximation colinéaire, "peaking approximation", ou encore approximation du logarithme dominant car on a seulement gardé le terme : $\ln(E_b^2/m_e^2)$ qui provient de la limite inférieure de l'intégration sur l'angle. Cette approximation est valable tant que l'angle polaire d'émission du photon reste petit : $\theta \simeq m_e/E_b$ pour rester dans la limite hyper relativiste et parce que nous avons séparé artificiellement la radiation de l'électron et du positron. Tant que le recouvrement de l'espace des phases reste faible, l'approximation est correcte mais pour des grands angles l'interférence devient importante. La situation est similaire aux franges d'interférence dans l'expérience des fentes de Young : plus la distance entre les deux fentes est grande plus les franges d'interférence sont faibles.

3.5.2 Effet sur le pic du Z

Ces corrections radiatives entraînent deux effets :

- i) un déplacement de la valeur du pic du Z (correspondant à l'intégration sur une somme infinie de photons mous et virtuels) ;
- ii) un changement de la cinématique. Ce dernier point entraîne ce qui est appelé le "radiative return" du pic du Z observé auprès du collisionneur LEP II. Le LEP II fonctionnait à des énergies \sqrt{s} supérieures à la masse du Z mais le pic du Z apparaissait quand même dû aux émissions de photons durs par l'état initial. La section efficace à la masse du Z étant jusqu'à 1000 fois supérieure à ce qu'elle serait sans échange de Z, ces émissions étaient grandement favorisées par le pôle de la section efficace de Born.

De façon plus générale, à chaque s correspondant à l'énergie rendue disponible par les faisceaux,

$$\sigma(s) = \int_0^s ds' \sigma(s') R(s, s') \quad (3.54)$$

où $R(s, s')$ est la probabilité d'avoir une émission d'un ou plusieurs photons faisant passer l'énergie de s à s' . Cet effet est illustré à la figure 3.8 où les migrations des $s' < s$ peuplent les régions à plus grand s si la section efficace Born y est inférieure.

En général il est possible de diminuer l'effet de ces corrections radiatives en rejetant les événements pour lesquels soit les photons émis sont détectés soit en imposant que la masse invariante totale reconstruite M_h soit proche de l'énergie a priori disponible. Ainsi à la figure 3.8, pour une énergie de $\sqrt{s} = 175$ GeV

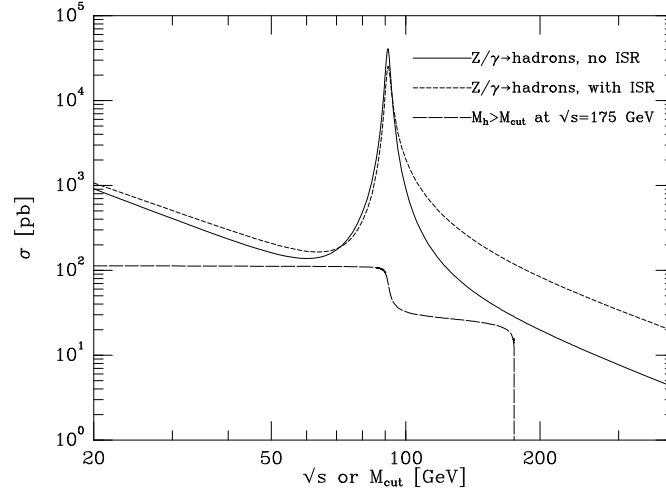


FIGURE 3.8 – Prédications des sections efficaces totales, avec et sans corrections radiatives QED dans l’état initial (ISR) dans la région d’énergie proche du pic du Z . \sqrt{s} représente l’énergie dans le centre de masse des faisceaux avant radiation.

on mesure la section efficace à laquelle contribuent tous les événements produits à un M_h tels que $M_h > M_{cut}$.

L’usage de ces radiations fut et est encore exploité jusqu’à en devenir une méthode à part entière, pour la mesure de certaines résonances étroites aux expériences KLOE, BaBar et Belle (des “meson factories”) sans devoir modifier l’énergie des faisceaux et également pour des mesures de facteurs de formes et de fonction de structure (voir le chapitre suivant) dans les régimes cinématiques hors de l’acceptance (en l’absence de radiations) du détecteur.

3.6 Au-delà du Z

Le LEP dans sa seconde phase a atteint une énergie dans le centre de masse de 209 GeV, ouvrant alors de nouveaux canaux de production de paires de fermions ou de bosons comme illustré sur la figure 3.9. Des projets de futurs collisionneurs e^+e^- à plus haute énergie encore sont à l’étude (projets ILC au Japon, le CEPC en Chine et les CLIC et FCC(ee) au CERN) entre autres pour fournir des mesures de précision du boson de Higgs.

3.7 Production de particules

On étudie les taux relatifs de production de particules de façon inclusive et séparément pour les hadrons chargés identifiés (π^\pm , K^\pm , p) ou se désintégrant en particules chargées (K^0 , ϕ , Λ) en fonction de leur fraction d’impulsion :

$$x_p = p/E_b = 2p/\sqrt{s} \quad \text{ou} \quad \xi_p = \log(1/x_p) \quad (3.55)$$

où p est l’impulsion de la particule. Le facteur 2 dans la définition de x_p provient du fait que l’énergie disponible est partagée au moins entre deux particules (conservation de P_z).

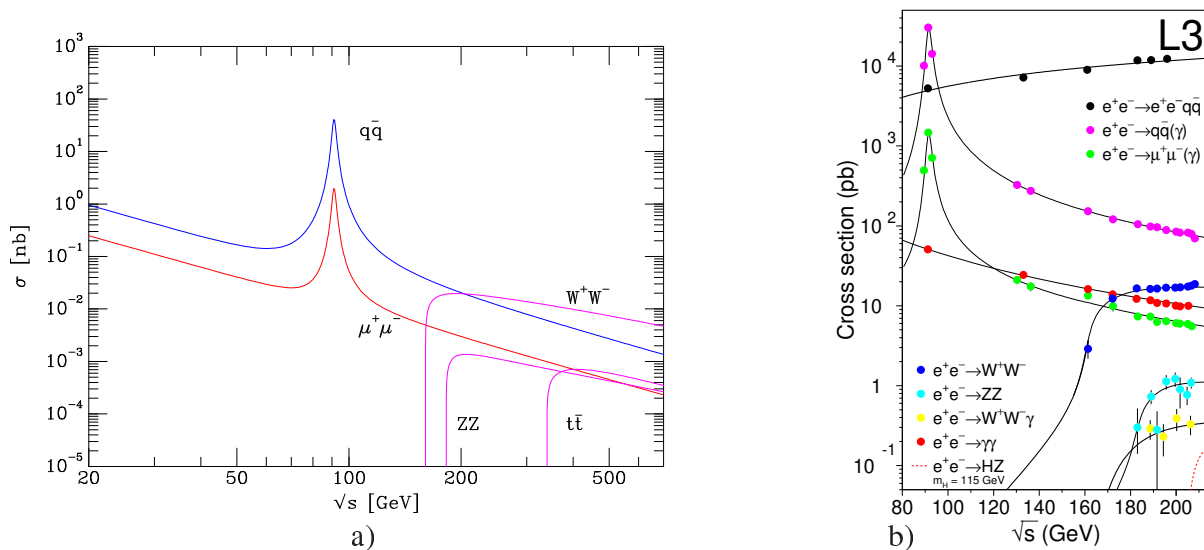


FIGURE 3.9 – a) Prédictions de différentes sections efficaces en fonction de l'énergie disponible dans le centre de masse. b) Mesures de différentes sections efficaces de la Collaboration L3 auprès du LEP [Phys. Rept. 532 (2013), 119-244]

Les spectres de production de hadrons ont une forme similaire mais le taux de production dépend fortement de la masse de la particule comme illustré à la figure 3.10 de gauche.

En prenant le logarithme de l'inverse de x_p on se focalise sur le mécanisme de production de particules aux petites valeurs de x_p correspondant aux grandes valeurs de ξ_p . La figure 3.10 de droite présente ces spectres pour différentes énergies. Les distributions en ξ_p tombent aux petites valeurs (grands x_p) pour des raisons cinématiques et de façon indépendante de l'énergie du centre de masse. La chute aux grandes valeurs de ξ_p (petits x_p) est due au fait que les gluons ont de moins en moins d'énergie et finissent par ne plus créer de paire $q\bar{q}$. Ceci permet d'expliquer pourquoi le pic de la distribution se déplace avec l'énergie puisque ξ_p est une grandeur relative et que le seuil de production d'une paire $q\bar{q}$ est une valeur absolue en énergie.

La forme de ces courbes est bien décrite par les prédictions QCD (ici NLLA) mais leur normalisation doit être fournie par les mesures expérimentales.

3.7.1 Les fonctions de fragmentation

Jusqu'ici nous n'avons pas vu comment les quarks se recombinent en hadrons, nous avons pu utiliser le fait que la probabilité que les quarks donnent des hadrons est de 1. Si l'on s'intéresse à la production d'un certain hadron h :

$$e^+e^- \rightarrow hX$$

à la différence du cas inclusif $e^+e^- \rightarrow X$, on écrit la section efficace correspondante comme :

$$\frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \rightarrow hX) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \left[D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z) \right] \quad (3.56)$$

où la somme porte sur toutes les saveurs de quarks. Cette expression correspond à une suite de deux séquences temporelles :

i) une paire $q\bar{q}$ est créée;

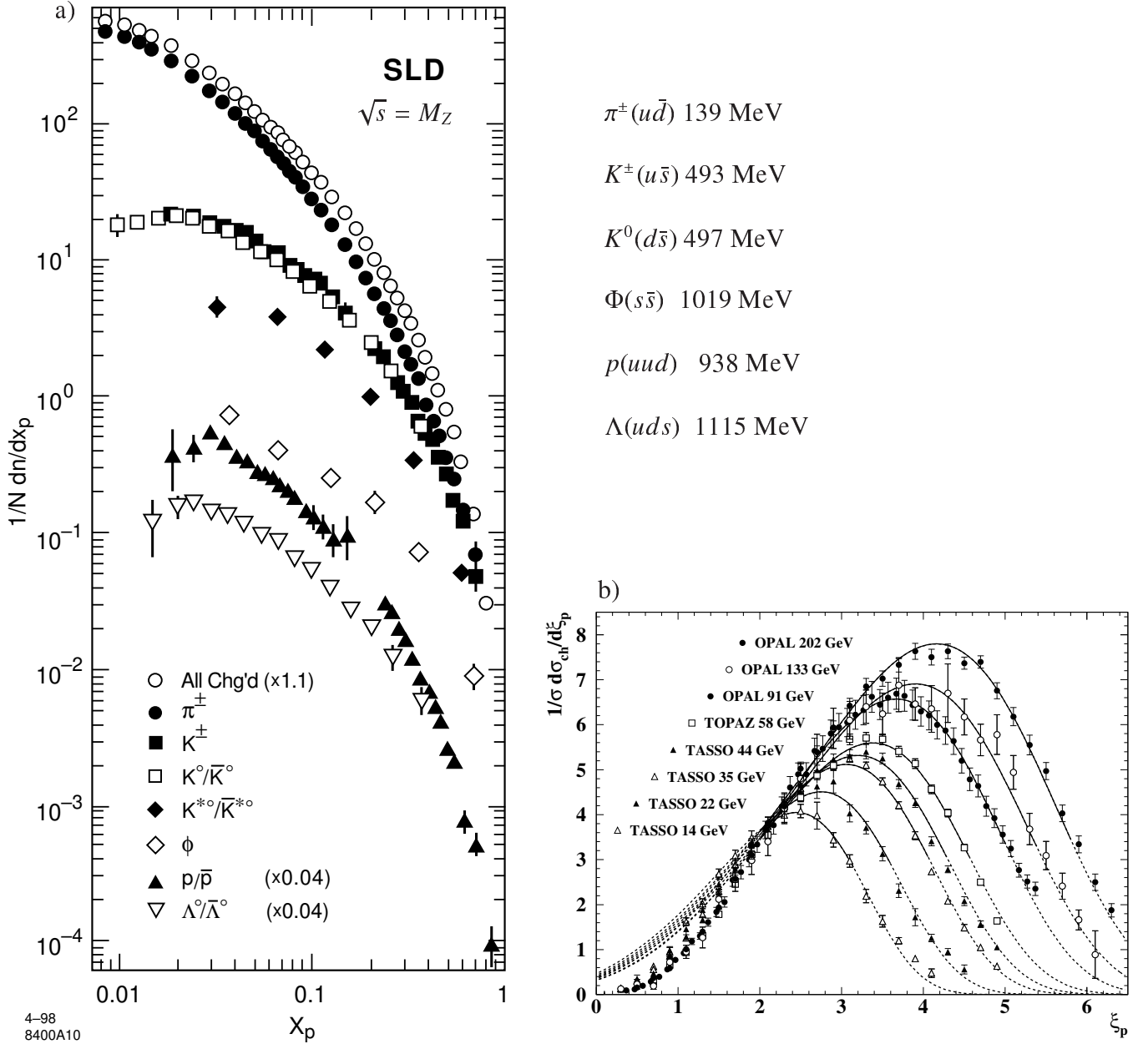


FIGURE 3.10 – a) Spectre en x_p mesuré par SLD au pic du Z. Les taux des baryons p , \bar{p} , Λ et $\bar{\Lambda}$ ont été réduits d'un facteur 25 pour des raisons de lisibilité. b) Spectre en $\xi_p = \log(1/x_p)$ mesuré par TASSO (PETRA - DESY), TOPAZ (TRISTAN - KEK) et OPAL (LEP I et II - CERN). Les courbes montrent un ajustement de la prédiction Next-to-the Leading Log Approximation (NLLA) de QCD.

ii) la fragmentation d'un ou des deux quarks en hadron h qui lui est détectable.

Les fonctions de fragmentation $D_q^h(z)$ représentent la probabilité qu'un hadron h soit trouvé dans les débris d'un quark q (ou antiquark \bar{q}) portant une fraction z de son énergie. La fraction z est définie par

$$z = \frac{E_h}{E_b} = \frac{2E_h}{\sqrt{s}} . \quad (3.57)$$

Elles ne prennent du sens que dans les productions multiples de hadrons (i.e. loin de la région des résonances).

La conservation des probabilités implique des règles de somme sur les fonctions de fragmentation.

i) Tout quark doit finir dans un hadron :

$$\sum_h \int_{z_{min}}^1 D_q^h(z) dz = 1 \quad (3.58)$$

$$(3.59)$$

Le seuil en énergie est $z_{min} = 2M_h / \sqrt{s}$.

ii) Un hadron h provient toujours de quarks et d'antiquarks :

$$\sum_q \int_{z_{min}}^1 [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] dz = n_h \quad (3.60)$$

où n_h est la multiplicité moyenne du hadron h dans l'ensemble hadronique formé par q et \bar{q} .

iii) L'intégrale sur l'impulsion du quark et de l'antiquark doit se retrouver intégralement dans la somme des hadrons :

$$\sum_h \int_{z_{min}}^1 z [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)] dz = 1 \quad (3.61)$$

$$(3.62)$$

De façon à se rendre indépendant de s , on divise souvent par la section efficace totale $e^+e^- \rightarrow X$:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \rightarrow hX) = \frac{\sum_q e_q^2 [D_q^h(z) + D_{\bar{q}}^h(z)]}{\sum_q e_q^2} \quad (3.63)$$

comme cela est fait à la figure 3.10.

Comme exemple illustratif, la fragmentation des quarks b en hadrons B , c'est-à-dire contenant une saveur b , est montrée à la figure 3.11. Cette mesure provient de l'expérience SLD au SLAC (e^+e^-) faite à $\sqrt{s} \simeq M_Z$. Le fait de prendre comme variable $z = 2E_h / \sqrt{s}$ (notée x_B sur la figure 3.11) permet de prendre en compte l'énergie de la particule en question en non plus son impulsion comme pour x_p , dû à la masse importante des hadrons B .

Différents modèles tentent de décrire la dépendance en z des fonctions de fragmentation. La plus connue fut proposée par Peterson et al. [8] en 1983. L'idée de départ repose sur la cinématique : quand un quark lourd, Q , se combine avec un quark léger, q , pour former un hadron, l'impulsion du quark lourd est à peine modifiée. La forme suivante est proposée :

$$D_Q^h(z) = N(\varepsilon) \frac{1}{z(1 - \frac{1}{z} - \frac{\varepsilon}{1-z})^2} \quad (3.64)$$

Au départ dans le modèle, le paramètre est fixé à $\varepsilon = m_q^2 / m_Q^2$. En pratique ε est laissé comme paramètre libre car m_q^2 représente l'échelle non perturbative à considérer et non pas purement la masse du quark léger. Le facteur $N(\varepsilon)$ fixe la normalisation. Les comportements aux limites valent :

$$z \rightarrow 1 \quad D_Q^h(z) \rightarrow N(\varepsilon) \frac{(1-z)^2}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad (3.65)$$

$$z \rightarrow 0 \quad D_Q^h(z) \rightarrow N(\varepsilon)z \rightarrow 0 \quad (3.66)$$

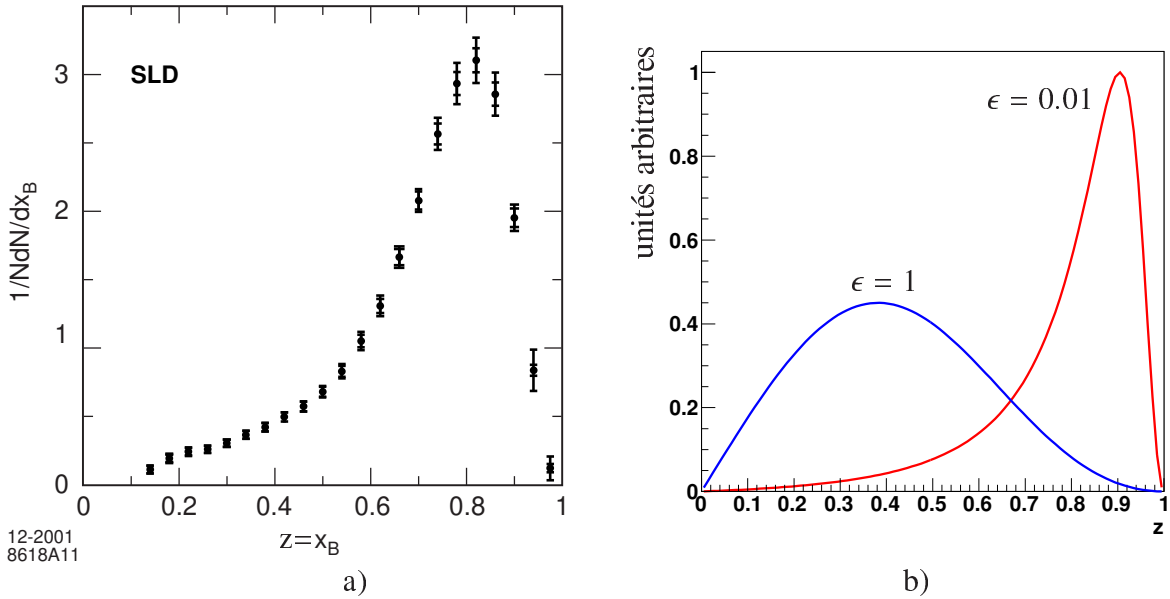


FIGURE 3.11 – a) Spectre relatif de fragmentation de quarks b en hadrons B en fonction de $x_B = z$ mesuré par la Collaboration SLD, à $\sqrt{s} = M_Z$ [SLD Coll., Phys.Rev.D 65 (2002) 092006, Phys.Rev.D 66 (2002) 079905 (erratum)]. b) Spectre relatif (unités arbitraires) de fragmentation de Peterson pour des valeurs de $\epsilon = 1$ (bleu - quark léger) et $\epsilon = 0.01$ (rouge - quark lourd)

Le terme $\epsilon/(1-z)$ fixe le pic de la distribution qui tend vers 1 pour $\epsilon \rightarrow 0$ et tend vers 1/2 pour $m_q \simeq m_Q$.

Les programmes de simulation qui décrivent l'état final hadronique utilisent de telles paramétrisations tout en laissant certains paramètres ajustables.

3.7.2 Production de quarks lourds

Jusqu'ici nous avons considéré que les quarks étaient de masse nulle. Pour les énergies du LEP et du SLC c'est une approximation raisonnable pour les u, d, s et c . En revanche les masses des quarks b et t doivent être prises en considération.

Considérons l'ordre le plus bas : $e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q}$, où Q désigne un quark lourd. L'effet de la masse joue à deux niveaux : l'élément de matrice et l'espace de phase d'intégration. La conservation de l'énergie impose que la section efficace s'annule pour tout $\sqrt{s} < 2m$. Utilisons la vitesse

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \quad (3.67)$$

de façon à retrouver l'approximation des quarks légers dans la limite $\beta \rightarrow 1$:

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow Q\bar{Q})}{d\Omega} = N_c \frac{\alpha^2}{4s} \beta \left[1 + \cos^2 \theta + (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \right] Q_i^2 \quad (3.68)$$

Le terme $(1 - \beta^2) \sin^2 \theta$ qui disparaît dans la limite relativiste correspond aux diffusions inversant l'hélicité, ce qui n'est possible qu'en présence de masse.

On trouve également que :

$$R = N_c Q_Q^2 \beta \frac{3 - \beta^2}{2} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} R_Z &= N_c \frac{\beta}{a_\mu^2 + v_\mu^2} (\beta^2 a_Q^2 + \frac{3 - \beta^2}{2} v_Q^2) \\ &\equiv R_{ZA}(\beta) + R_{ZV}(\beta) \end{aligned} \quad (3.70)$$

La dépendance en la masse est différente pour les parties vectorielle et axiale du couplage, car l'invariance de chiralité est brisée. De même, les coefficients relatifs à la correction de l'ordre supérieur seront différents pour chaque couplage.

$$R = R_{ZV} \left(1 + c_1 \frac{\alpha_S}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \right) \quad (3.71)$$

$$+ R_{ZA} \left(1 + d_1 \frac{\alpha_S}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \right) \quad (3.72)$$

3.8 Section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$

En négligeant les masses, l'élément de matrice élevé au carré de section efficace du processus

$$e^+(p_{e^+}) + e^-(p_{e^-}) \rightarrow \gamma^*(q) \rightarrow q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}}) + g(p_g) \quad (3.73)$$

à l'ordre le plus bas est donné par :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8C_F(4\pi)^3 \alpha^2 \alpha_S N_c Q_i^2 \frac{(p_{e^+} \cdot p_q)^2 + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-} \cdot p_q)^2 + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2}{(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_g)(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \quad (3.74)$$

Nous n'allons pas dériver cette relation à partir des règles de Feynman car on peut la retrouver à partir de l'équation (3.16) pour laquelle il n'y a pas de radiation de gluon.

Dans le cas $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, on peut réécrire le dénominateur de l'équation (3.16) comme :

$$s^2 = (p_{e^+} + p_{e^-})^2 (p_q + p_{\bar{q}})^2 = 4(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_{\bar{q}}) \quad (3.75)$$

qui est maintenant modifié en une expression contenant deux pôles, correspondant aux radiations colinéaires du gluon avec un des deux quarks et qui correspond simplement au fait que l'on a multiplié la section efficace Born par un radiateur de gluon dont l'expression est similaire à celle du radiateur de photon de l'équation 3.49 :

$$\frac{1}{4(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_{\bar{q}})} \rightarrow 2 \frac{p_q \cdot p_{\bar{q}}}{(p_q \cdot p_g)(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \times \frac{1}{4(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_{\bar{q}})} \quad (3.76)$$

$$= \frac{1}{2(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_g)(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \quad (3.77)$$

D'autre part en ce qui concerne le numérateur, dans l'hypothèse où il n'y a pas de radiation de gluon, on a les égalités suivantes (variables de Mandelstam) :

$$t = (p_{e^+} - p_{\bar{q}})^2 = (p_q - p_{e^-})^2 \simeq -2p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}} = -2p_q \cdot p_{e^-} \quad (3.78)$$

$$\Rightarrow (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 = (p_{e^-} \cdot p_q)^2 = (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})(p_{e^-} \cdot p_q) \quad (3.79)$$

$$u = (p_{\bar{q}} - p_{e^-})^2 = (p_{e^+} - p_q)^2 \simeq -2p_{\bar{q}} \cdot p_{e^-} = p_{e^+} \cdot p_q$$

$$\Rightarrow (p_{e^+} \cdot p_q)^2 = (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2 = (p_{e^+} \cdot p_q)(p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})$$

on peut réécrire la partie cinématique du numérateur de 3.74, comme :

$$2\{(p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})(p_{e^-} \cdot p_q) + (p_{e^+} \cdot p_q)(p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})\} \quad (3.80)$$

Ce qui est bien égal à un facteur 2 près à l'expression des termes cinématiques trouvée dans (3.16). Enfin, la radiation du gluon a entraîné les facteurs α_s et $C_F = \frac{N^2-1}{2N} = 4/3$, qui rend compte des différentes combinaisons de couleurs que le gluon émis peut porter.

En intégrant sur les trois angles indépendants (voir séances d'exercices), on obtient :

$$\frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}, \quad (3.81)$$

où $\sigma_{q\bar{q}}$ est donné par l'équation 3.19. Les variables scalaires x_i , dans le système du centre de masse, correspondent aux fractions d'énergies :

$$x_q = \frac{E_q}{E_b}, \quad x_{\bar{q}} = \frac{E_{\bar{q}}}{E_b}, \quad x_g = \frac{E_g}{E_b}, \quad (3.82)$$

où E_b est l'énergie du faisceau ($s = q^2 = (2E_b)^2$). Remarquons que cette définition n'est pas invariante de Lorentz, il vaut mieux définir :

$$x_i = \frac{2q \cdot p_i}{q^2} \quad (3.83)$$

où q est le 4-vecteur du boson échangé.

La conservation de l'énergie et de l'impulsion imposent :

$$\begin{aligned} x_q + x_{\bar{q}} + x_g &= 2 \\ 1 - x_i &= \frac{1}{2} x_j x_k (1 - \cos \theta_{jk}), \quad i \neq j \neq k, \quad i \neq k. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Les bornes sont donc :

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (3.85)$$

et donc

$$x_i + x_j \geq 1, \quad i \neq j \quad (3.86)$$

Cela signifie qu'un parton a une énergie au maximum égale à celle du faisceau ($x_i = 1$), et dans ce cas les deux autres partons sont colinéaires ($\theta_{jk} = 0$). L'impulsion de l'état initial étant nulle dans le plan transverse (par définition), l'état final tient dans un plan :

$$\theta_{q\bar{q}} + \theta_{\bar{q}g} + \theta_{qg} = 2\pi \quad (3.87)$$

Remarquons que la section efficace 3.81 est symétrique sous l'échange de x_q par $x_{\bar{q}}$ ce qui est imposé par la symétrie CP de QCD.

Le domaine d'intégration de 3.81 est donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_q, x_{\bar{q}} \leq 1 \\ 1 &\leq x_q + x_{\bar{q}} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Singularités

Cette équation présente des singularités quand un quark atteint son énergie maximum :

$$x_i \rightarrow 1^- \quad i = q, \bar{q} \quad (3.89)$$

et un double pôle quand les deux quarks atteignent simultanément cette limite :

$$x_q \rightarrow 1^- \quad \iff \quad (p_{\bar{q}} + p_g)^2 = 2(p_{\bar{q}} \cdot p_g) \rightarrow 0 ; \quad (3.90)$$

$$x_{\bar{q}} \rightarrow 1^- \quad \iff \quad (p_q + p_g)^2 = 2(p_q \cdot p_g) \rightarrow 0 . \quad (3.91)$$

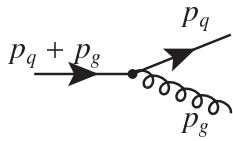
Nous nous trouvons face à deux singularités dites *infrarouges* :

1. **Gluon colinéaire** : le gluon est colinéaire soit au quark soit à l'antiquark. Cette singularité est aussi appelée *singularité de masse* car elle serait absente si nous pouvions tenir compte de la masse soit du gluon soit du quark.
2. **Gluon soft** : $p_g \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque l'énergie du gluon tend vers zéro.

Elles apparaissent facilement dans la réécriture :

$$\frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2}{(1 - x_q)(1 - x_{\bar{q}})} = \frac{2}{(1 - x_q)(1 - x_{\bar{q}})} - \frac{1 + x_q}{1 - x_{\bar{q}}} - \frac{1 + x_{\bar{q}}}{1 - x_q} . \quad (3.92)$$

L'origine de ces singularités est dans les propagateurs des quarks :



$$\frac{1}{(p_q + p_g)^2} = \frac{1}{2E_q E_g (1 - \cos \theta_{qg})} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - x_{\bar{q}}}$$

$$\frac{1}{(p_{\bar{q}} + p_g)^2} = \frac{1}{2E_{\bar{q}} E_g (1 - \cos \theta_{\bar{q}g})} = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - x_q}$$

i) cas $E_g \rightarrow 0, \theta_{qg} \neq 0, \theta_{\bar{q}g} \neq 0$

Dans ce premier cas, les singularités sont associées à des pôles simples. La contribution infrarouge à la section efficace totale est donnée par :

$$\sigma \sim \alpha_S \int \frac{dx_q dx_{\bar{q}}}{(1 - x_q)(1 - x_{\bar{q}})} \sim \alpha_S \int \frac{dx_q dx_{\bar{q}}}{x_g^2 (1 - \cos \theta_{qg})(1 - \cos \theta_{\bar{q}g})} \quad (3.93)$$

En introduisant les variables :

$$z = x_g \quad \text{et} \quad u = \cos \theta_{qg} \quad (3.94)$$

telles que $x_q \simeq 1 - z(1 + u)/2$. Dans la limite d'un gluon mou, l'émission de celui-ci ne modifiera pas les impulsions des quarks, les deux quarks resteront dos-à-dos, $\theta_{qg} \simeq \pi - \theta_{\bar{q}g}$, donc $\cos \theta_{qg} \simeq \cos(\pi - \theta_{\bar{q}g}) = -\cos \theta_{\bar{q}g}$ et donc $x_{\bar{q}} \simeq 1 - z(1 - u)/2$. Après avoir calculé les dz et $d\theta$ dans les nouvelles variables, nous avons :

$$d\sigma \sim \alpha_S \int \frac{dz}{z} \frac{du}{1 - u^2} \quad (3.95)$$

Remarquons que le terme en z (c'est à dire en x_g^2) ne signifie pas un double pôle car le gluon est soit colinéaire au quark soit à l'antiquark. Ce changement de variables montre bien qu'il s'agit de pôles simples car $u \neq \pm 1$.

ii) cas $E_g \rightarrow 0$ et $\theta_{qg} \rightarrow 0$, ou $\theta_{\bar{q}g} \rightarrow 0$

L'équation 3.95 reste valable, mais dans ce cas : $z \rightarrow 0$ et $u \rightarrow \pm 1$ ce qui produit un double pôle (en prenant $u \simeq 1 - \theta^2/2$) :

$$d\sigma \sim \alpha_s \int \frac{dz}{z} \int \frac{d\theta}{\theta} \quad (3.96)$$

Ces divergences sont évitées si les conditions limites ne sont pas rencontrées. C'est ce qui arrive naturellement dans les mesures expérimentales car si une activité hadronique provient d'un gluon de trop basse énergie et/ou émis de façon colinéaire à un quark, elle ne sera pas détectée. Les résolutions angulaire, $\Delta\theta > 0$ et en énergies $\Delta E > 0$ sont de valeurs finies. En dessous d'un certain seuil, l'état $|q\bar{q}g\rangle$ théorique sera englobé dans l'état $|q\bar{q}\rangle_{phys}$ physique.

Les distributions expérimentales des événements 3 jets au SLAC sont montrées à la figure 3.12. Les jets sont classés par ordre d'énergie décroissant. L'angle de Ellis-Karliner :

$$\cos \theta_{EK} = \frac{x_2 - x_3}{x_1} \quad (3.97)$$

représente l'angle entre les jets 1 et 2 dans le référentiel au repos du système constitué des jets 2 et 3. Cette variable permet de mettre en évidence le caractère vectoriel dans l'émission de gluons.

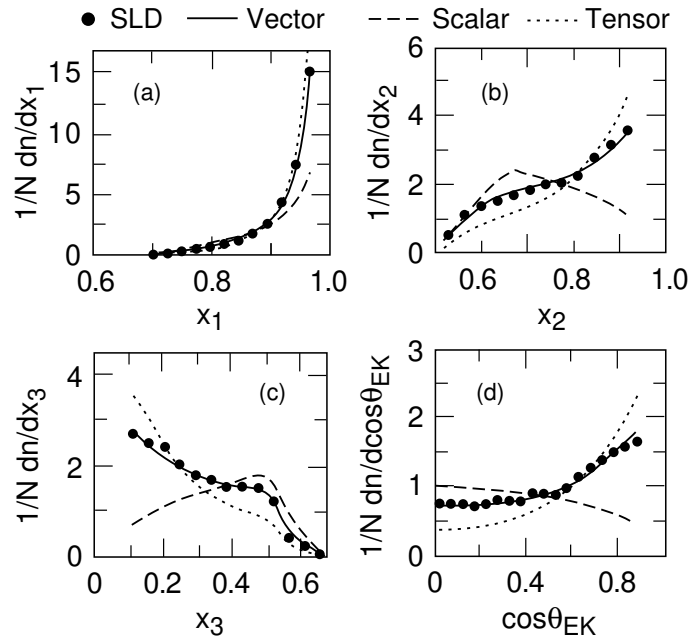


FIGURE 3.12 – Distributions expérimentales des événements à 3 jets mesurées par l'expérience SLD [SLD Coll, Phys. Rev. D **55** (1997) 2533] et comparées aux prédictions des modèles avec un gluon scalaire, vectoriel et tensoriel, à l'ordre dominant.

La conservation de l'énergie $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ impose que :

- i) $x_1 > 2/3$ et $x_2 > 1/2$ sinon le jet serait identifié à un autre groupe ;
- ii) $x_1 = 1 \Rightarrow x_3 < 0.5$, or $x_1 < 1$ et donc x_3 peut dépasser $1/2$.
- iii) La bosse juste avant $x_3 = 1/2$ provient de la somme de la distribution décroissante des gluons pour $x_g \leq 1/2$ et de la distribution croissante du quark ou antiquark pour lequel $x_q, x_{\bar{q}} \leq 1/2$.

Notons que dans l'hypothèse d'un gluon de spin 0, seul le numérateur est modifié dans l'expression de la section efficace :

$$\frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g(\text{spin}0)}}{dx_q dx_{\bar{q}}} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{(2-x_q-x_{\bar{q}})^2}{(1-x_q)(1-x_{\bar{q}})}. \quad (3.98)$$

3.8.1 Approximation colinéaire

Commençons par réexprimer la section efficace $q\bar{q}g$ en fonction des variables attachées au gluon plutôt qu'aux quarks, en remplaçant

$$z = x_g \quad t = 1 - \cos(\theta_{qg}) \quad (3.99)$$

En utilisant $2(1-x_{\bar{q}}) = x_q x_g (1 - \cos(\theta_{qg}))$, on trouve :

$$x_q = \frac{2(1-z)}{2-zt} \quad x_{\bar{q}} = \frac{2-z(2-z)t}{2-zt} \quad dx_q dx_{\bar{q}} = \frac{z(2-z)}{(2-zt)^2} dz dt, \quad (3.100)$$

la section efficace 3.81 peut être réécrite comme :

$$\frac{d^2\sigma_{q\bar{q}g}}{dz dt} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4 \left[1 + (1-z)^2 \right] - 4z(2-z)t + z^2(2-z)^2 t^2}{z t (2-t)(2-zt)^2} \quad (3.101)$$

où $\sigma_{q\bar{q}}$ est donné par l'équation 3.19.

Dans la limite colinéaire $t \simeq \theta^2/2$ et

$$d^2\sigma = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[1 + (1-z)^2 \right] \frac{dz}{z} \frac{d\theta^2}{\theta^2} \quad (3.102)$$

qui est à rapprocher de l'équation 3.53 obtenue pour la radiation colinéaire d'un photon par les électrons et positons des faisceaux (bien que intégrées sur l'angle). Le terme $\left[1 + (1-z)^2 \right]/z$ est appelé facteur de splitting P_{gq} , nous le retrouverons au chapitre suivant dans les interactions profondément inélastiques. Il correspond, une fois multiplié par $N_C \frac{C_F \alpha_s}{2\pi}$, à la probabilité pour un quark de se séparer en un quark (portant une fraction d'impulsion z) et un gluon (de fraction d'impulsion $1-z$).

En prenant le problème en sens inverse, considérons maintenant la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ intégrée dans la région correspondant à l'émission d'un gluon indétectable mais également comprenant les corrections virtuelles à l'ordre α_s . La question pertinente, devant se rattacher à une observable, est : comment se comporte la section efficace "totale" de ce que l'on cherche à mesurer ?

3.8.2 Corrections radiatives QCD virtuelles

Les corrections radiatives virtuelles au premier ordre en α_s sont illustrées à la figure 3.13. Les divergences infrarouges qui sont apparues vont être annulées lorsque l'on prend la somme des amplitudes $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ et $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$.

Il existe différentes procédures de renormalisation. Le principe est toujours le même, on introduit un régulateur qui rend les intégrales finies, ensemble pour les corrections réelles et virtuelles. On fait ensuite tendre le régulateur vers zéro pour obtenir un résultat fini. Certaines méthodes proposent de donner

une masse aux gluons, d'autres de mettre les quarks hors de leur couche de masse. La méthode souvent considérée comme la plus élégante est la régularisation dimensionnelle. On introduit un nombre de dimensions spatio-temporelles $n > 4$. Cela affecte l'espace des phases de l'intégration de l'élément de matrice.

Nous pouvons réécrire la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g) &= \sigma_{q\bar{q}} \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \int dx_q dx_{\bar{q}} \frac{x_q^2 + x_{\bar{q}}^2 - \epsilon(2 - x_q - x_{\bar{q}})}{(1 - x_q)^{1+\epsilon}(1 - x_{\bar{q}})^{1+\epsilon}} \\ &= \sigma_{q\bar{q}} \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \left[\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{19}{2} + O(\epsilon) \right]\end{aligned}\quad (3.103)$$

où $H(\epsilon)$ est l'opérateur de Casimir avec $n = 4 - 2\epsilon$ où $\epsilon < 0$ et

$$H(\epsilon) = \frac{3(1 - \epsilon)^2}{(3 - 2\epsilon)\Gamma(2 - 2\epsilon)} = 1 + O(\epsilon)\quad (3.104)$$

où Γ est la fonction habituelle $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ pour des z réels et positifs.

Les singularités infrarouges que nous avons vues apparaissent dans des pôles en ϵ . Le pôle double (resp. simple) correspond au cas de figure des singularités colinéaires et (resp. ou) soft.

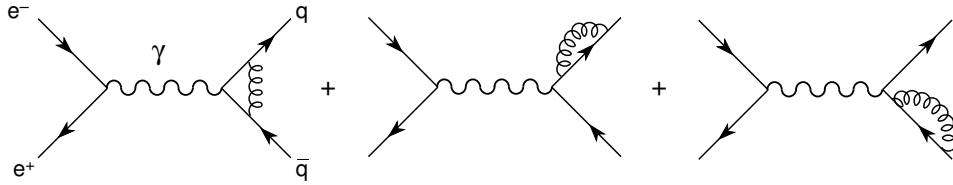


FIGURE 3.13 – corrections gluoniques à une boucle

Les corrections virtuelles (diagrammes avec un gluon réabsorbé de la figure 3.13) font apparaître des divergences ultra-violettes :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma_{q\bar{q}} \frac{C_F \alpha_S}{2\pi} H(\epsilon) \left[-\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} - 8 + O(\epsilon) \right].\quad (3.105)$$

Les simple et double pôles s'annulent donc parfaitement dans la somme à cet ordre. On peut écrire les corrections apportées à l'ordre non nul le plus bas (*tree level*) comme :

$$R = K_{QCD} 3 \sum_q Q_q^2 = 3 \sum_q Q_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + O(\alpha_S^2) \right)\quad (3.106)$$

Remarquons que la correction du premier ordre est positive, elle serait négative si le gluon était scalaire. L'annulation des divergences n'est pas accidentelle, le théorème de dit de Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN) montre que cela se passe pour tout objet "non physique", un quark nu ou un électron nu n'étant pas des objets physiques, la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ sans émission de gluon ne l'est donc pas. Le résultat obtenu dépend a priori de l'échelle de renormalisation μ dont la valeur de α_S dépend. La divergence ayant disparu, le premier terme de correction est indépendant de l'échelle de renormalisation. Le terme $O(\alpha_S^2)$ et les suivants, eux, en dépendent car de nouvelles divergences ultraviolettes apparaissent associées à la

renormalisation du couplage. Les coefficients dépendent donc du schéma de renormalisation.

La prise en compte des ordres supérieurs ($\alpha_S^2, \alpha_S^3, \dots$) fait intervenir les processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}, q\bar{q}g, q\bar{q}gg, \dots$ et fait apparaître de nouvelles divergences ultraviolettes. On peut développer l'expression en une série :

$$K_{QCD} = 1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + \sum_{n \geq 2} C_n \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \left(\frac{\alpha_S(\mu^2)}{\pi} \right)^n \quad (3.107)$$

La figure 3.14 montre les résultats des calculs faits jusqu'au troisième terme correctif. On constate que la dépendance en l'échelle de renormalisation diminue à chaque prise en compte d'un ordre supérieur. De façon générale on peut dire qu'un changement d'échelle dans une quantité physique qui a été calculée à l'ordre $\mathcal{O}(\alpha_S^n)$ induit des changements dans $\mathcal{O}(\alpha_S^{n+1})$.

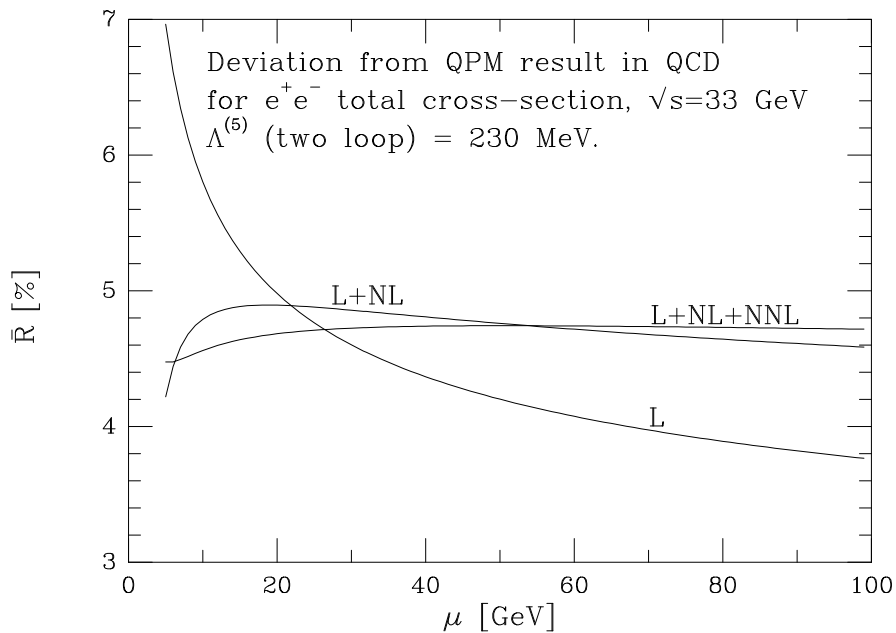


FIGURE 3.14 – Correction au rapport R à différents ordres en α_S . On y retrouve notre valeur estimée au L, à la masse du Z, soit $\alpha_S(M_Z)/\pi = 0.118/3.14 = 3.7\%$

3.9 Algorithmes de reconstruction de jets

Dans les algorithmes de reconstruction de jets, on tente de regrouper les particules de l'état final de façon à ce que la structure clairement visible expérimentalement soit reproduite. Il existe différents algorithmes présentant divers avantages et inconvénients que nous ne discuterons pas ici (sensibilités aux modèles de hadronisation, incertitudes théoriques,...). Les plus connus sont les algorithmes de JADE, de Cône, de Durham, de kt ,... L'algorithme de JADE présenté ci-dessous présente plusieurs avantages dont celui de ne souffrir de correction hadronique que de 5% à $\sqrt{s} = m_{Z^0}$. L'algorithme peut être appliqué à trois niveaux différents : au niveau des partons générés, au niveau des particules générées de l'état final (hadrons et leptons) ou au niveau des particules reconstruites dans un détecteur (soit réelles soit simulées) - voir figure 3.15. Pour les données expérimentales seul ce dernier niveau est applicable.

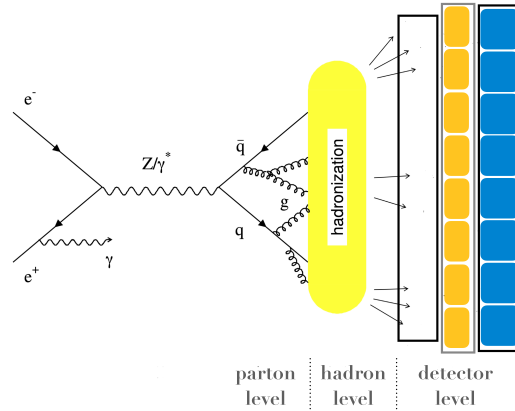


FIGURE 3.15 – Illustration de la possibilité d’appliquer un algorithme de jets à différents niveaux

3.9.1 Algorithme de JADE

La définition d’un événement à N jets suivant l’algorithme de JADE [9] est la suivante : soient les quadri-vecteurs énergie-impulsion p_i et p_j des particules i et j , dont la masse invariante vaut :

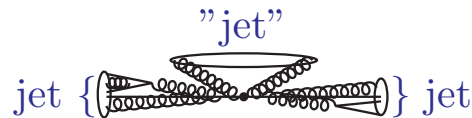
$$M_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2, \quad i \neq j \quad (3.108)$$

Si la masse invariante de la paire de particule ij est inférieure à un seuil donné y_{cut} :

$$M_{ij}^2 < y_{cut} s, \quad (3.109)$$

les particules i et j sont combinées pour former une “nouvelle particule” (pseudo-particule) d’impulsion $p_{ij} = p_i + p_j$. Cette procédure itérative est appliquée en traitant les pseudo-particules comme des particules. La procédure s’arrête quand toutes les paires de particules ont une masse invariante supérieure au seuil. Les (pseudo) particules résultantes sont identifiées à des jets et leur nombre est la *multiplicité de jets* n . Remarquons que le paramètre y_{cut} fixe la valeur pour laquelle un événement particulier passe de l’état de n -jet à celui de $n + 1$ -jet.

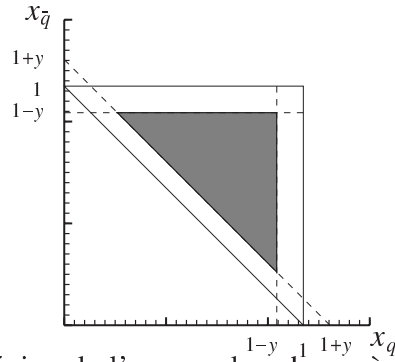
Le point fort de cet algorithme est que les corrections d’hadronisation sont faibles, surtout dans le cas des interactions e^+e^- , c’est donc l’algorithme qui est en général utilisé pour les études au LEP. Le point faible apparaît à l’ordre suivant : si deux gluons softs sont émis à grand angle par rapport aux deux quarks initiaux, ils peuvent former un troisième jet artificiel. Cela empêche d’inclure les techniques de resommations de gluons soft dans les simulations Monte Carlo.



Appliquons notre algorithme au niveau partonique dans les cas $q\bar{q}g$. Les masses invariantes des jets sont directement liées aux x_i :

$$M_{ij}^2 = \frac{s}{2} x_i x_j (1 - \cos \theta_{ij}) = \frac{s}{4} [(x_i + x_j)^2 - x_k^2] = s(1 - x_k) \quad (3.110)$$

Un événement sera donc identifié comme ayant 3 jets si chaque parton forme 1 jet, c’est-à-dire si :



3 Jets :

$$x_q < 1 - y$$

$$x_{\bar{q}} < 1 - y$$

$$x_g < 1 - y \Rightarrow x_q + x_{\bar{q}} > 1 + y$$

On remarque bien que la région de l'espace des phases à considérer ne contient pas de singularité soft ou colinéaire.

3.9.2 Algorithme de k_T

L'algorithme dit de k_T forme aussi des *clusters*. On y définit :

$$M_{ij}^2 = 2 \min [E_i^2, E_j^2] (1 - \cos \theta_{ij}), \quad i \neq j. \quad (3.111)$$

Si l'on considère des émissions à petit angle :

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &\simeq 2 \min [E_i^2, E_j^2] (1 - (1 - \theta_{ij}^2/2 + \dots)) \\ &\simeq \min [E_i^2, E_j^2] \theta_{ij}^2 \\ &\simeq k_T^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$

Dans ce cas les émissions problématiques pour l'algorithme de JADE, discutées plus haut, ne poseront pas de problème. Les gluons softs ayant une petite impulsion transverse par rapport à un des quarks, seront attachés au bons jets. L'algorithme dit de *anti* - k_T cherche le $\min [1/k_{Ti}^2, 1/k_{Tj}^2] \Delta_{ij}^2/R^2$ où $\Delta_{ij}^2 = (y_i - y_j)^2 + (\phi_i - \phi_j)^2$ où les y représentent la rapidité de la particule et R un paramètre de rayon.

3.9.3 Multiplicité de jets

D'un point de vue expérimental, le nombre de jets se calcule en se basant sur les impulsions des hadrons de l'état final. Notre approche, ici, en revanche, utilise les impulsions des partons. Si les idées développées au cours de ce chapitre sur le l'hadronisation et la dualité hadron-parton sont correctes, il nous est permis de tester les prédictions d'une approche perturbative de QCD en comparant le nombre de jets aux niveaux hadronique et partonique.

Définissons les grandeurs suivantes :

$$f_2 = \frac{\sigma_{2jet}}{\sigma_{tot}}, \quad f_3 = \frac{\sigma_{3jet}}{\sigma_{tot}}. \quad (3.113)$$

où $\sigma_{tot} = \sigma_{2jet} + \sigma_{3jet}$ est la section efficace totale à l'ordre α_S . Plus explicitement pour l'état final $q\bar{q}g$:

$$\begin{aligned} f_3 &\simeq \frac{\int d\sigma_{q\bar{q}g}}{\int d\sigma_{q\bar{q}}} = C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \int_{2y}^{1-y} \frac{dx_q}{1-x_q} \int_{1+y-x_q}^{1-y} \frac{dx_{\bar{q}}(x_q^2 + x_{\bar{q}}^2)}{1-x_{\bar{q}}} \\ &= C_F \frac{\alpha_S}{2\pi} \left(4Li_2 \left(\frac{y}{1-y} \right) + (3-6y) \log \left(\frac{y}{1-2y} \right) + 2 \log^2 \left(\frac{y}{1-y} \right) \right. \\ &\quad \left. - 6y - \frac{9}{2}y^2 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.114)$$

où $Li_2(z)$ est la fonction dilogarithmique (ou fonction de Spence), définie par sa représentation intégrale :

$$Li_2(z) = - \int_0^z du \frac{\log u}{1-u} \quad (3.115)$$

où aucune divergence n'apparaît.

Si l'on fait varier \sqrt{s} , l'énergie du centre de masse e^+e^- , en gardant y fixé, la fraction de jets f_i change car la constante de couplage dépend de l'échelle :

$$f_i(s, \alpha_S, y) = f_i(\alpha_S(s), y). \quad (3.116)$$

Cela donne un moyen de mesurer la dépendance $\alpha_S(s)$ comme illustré à la figure 3.16 [10] qui reprend les résultats des expériences JADE au collisionneur PETRA de DESY (à $\sqrt{s} = 35$ GeV) et d'OPAL au collisionneur LEP du CERN (à $\sqrt{s} = 91$ et 189 GeV).

Les résultats expérimentaux correspondent à des mesures basées sur un ensemble de hadrons, ils ne peuvent donc être comparés directement aux résultats théoriques faits au niveau des partons. Des programmes de simulations, basés sur les calculs QCD perturbatifs, incluent des effets de corrections approximatifs correspondant aux ordres supérieurs non calculés (pour compléter la fragmentation) et une simulation de l'hadronisation suivant des modèles choisis. Les résultats ici présentés sont comparés aux prédictions théoriques estimées sur base des simulations (PYTHIA, HERWIG, ARIADNE et COJETS). Un bon accord est observé. Plus de détails sur les simulations et leurs comparaisons aux mesures expérimentales peuvent être trouvés dans la référence [11].

Ces résultats montrent qu'une même multiplicité de jets est trouvée pour une valeur inférieure de y_{cut} quand \sqrt{s} augmente (voir par exemple 3.16c ou d). Dans les régions des grandes valeurs de y_{cut} par rapport au pic, cet effet est une conséquence de la variation de α_S . La faible diminution de l'ampleur du pic est également due à cette variation. Ceci est mis en évidence sur la figure 3.17 qui présente la fraction d'événements à 3-jets, f_3 , en fonction de l'énergie du centre de masse, \sqrt{s} , pour une valeur $y_{cut} = 0.08$

Remarquons finalement que la multiplicité de jets possède une grande sensibilité à α_S [$R_n \sim \alpha_s^{n-2}$]. Mais si cette sensibilité augmente avec n , la précision expérimentale souffre du nombre décroissant d'événements.

3.10 Structure de l'état final hadronique

L'étude de la structure de l'état final hadronique (*event shape* en anglais) évite une association directe des particules à un jet mais préfère calculer une valeur pour différentes observables, qui classe l'événement en accord avec sa topologie. De façon générale, ces observables sont construites telles que la valeur zéro corresponde au cas idéal d'un événement constitué de deux jets d'uniquement deux particules dos-à-dos. Les valeurs plus grandes indiquent la présence d'un ou de plusieurs jets additionnels. Il existe un grand nombre de telles observables. Nous nous concentrerons sur les principales qui de plus possèdent l'avantage d'être insensibles aux divergences infrarouges et ultraviolettes.

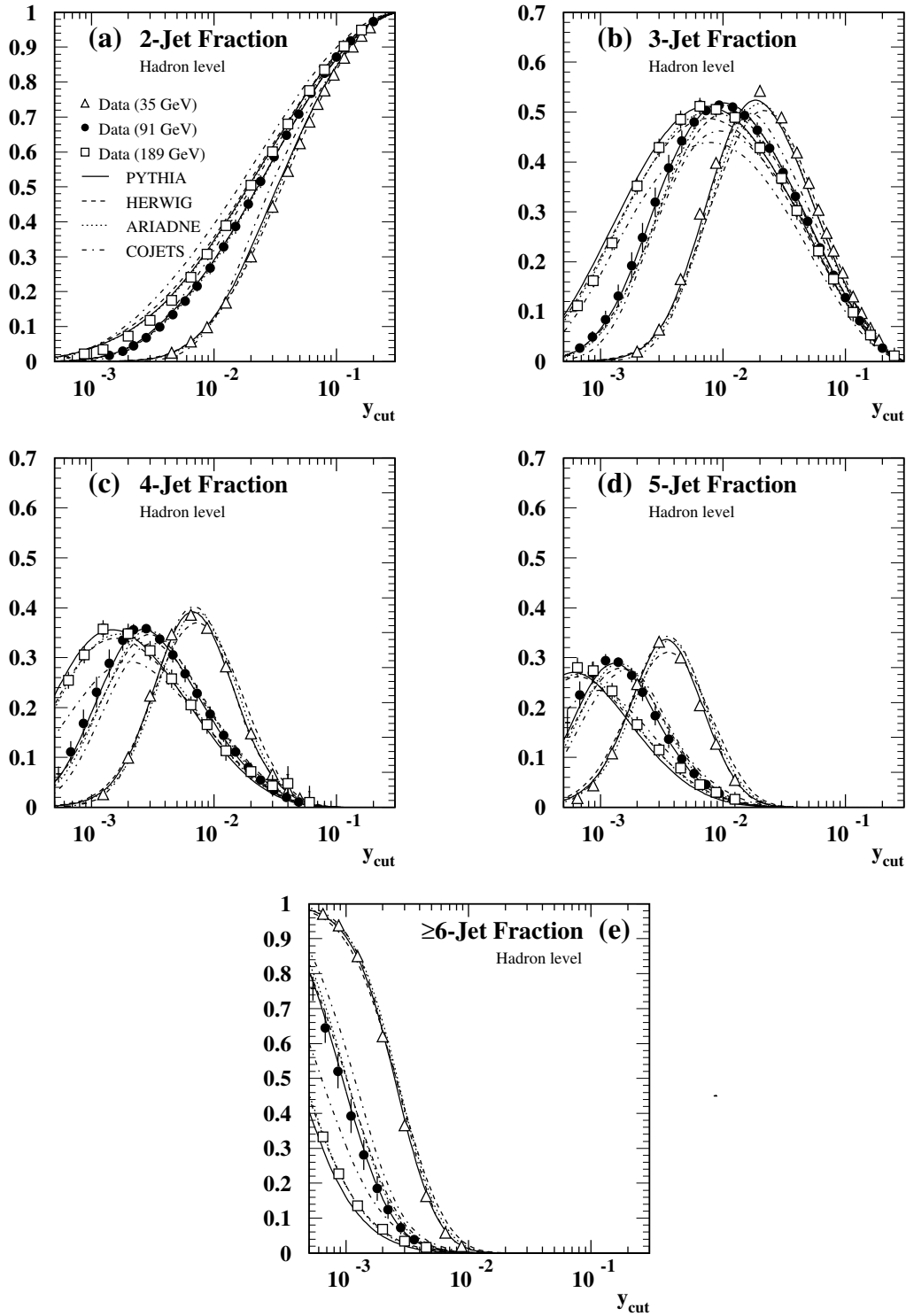


FIGURE 3.16 – Fraction d'événements avec 2, 3, 4, 5 et plus de 5 jets mesurés par les expériences JADE ($\sqrt{s} = 35$ GeV) et OPAL ($\sqrt{s} = 91$ et 189 GeV) en utilisant l'algorithme de reconstruction de jets JADE en fonction de la valeur du paramètre y_{cut} . Les barres d'erreurs représentent l'incertitude totale. Les courbes représentent les prédictions des modèles implémentés dans PYTHIA, HERWIG, ARIADNE et COJETS. [OPAL, Eur. Phys. J. C17 (2000) 19-51]

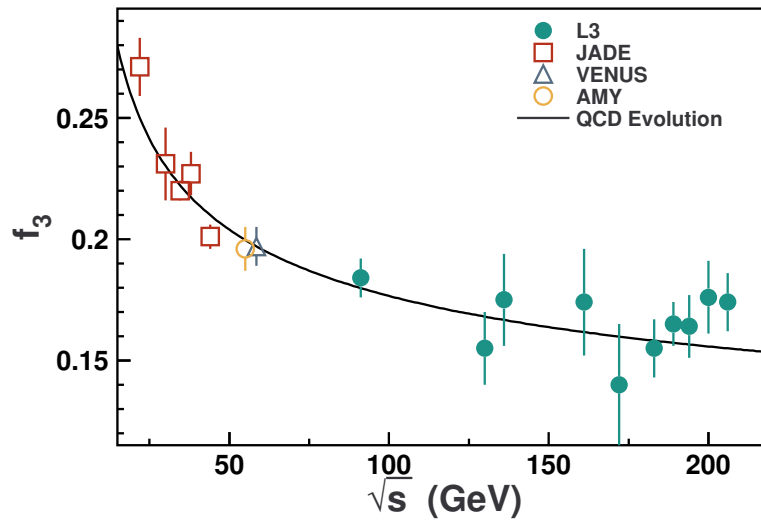


FIGURE 3.17 – Fraction d’événements à 3-jets en fonction de l’énergie du centre de masse, \sqrt{s} , pour une valeur $y_{cut} = 0.08$ mesurée par les expériences AMY (TRISTAN-KEK), VENUS (TRISTAN-KEK), JADE (PETRA-DESY) et L3 (LEP-CERN) et comparée à la dépendance prédite par QCD. Figure issue de la référence [L3 Coll., Phys. Rep. (2004) 399 71–174].

Les observables Thrust et M_H

On définit la variable Thrust, T , pour un événement, par :

$$T = \max_{\vec{n}} \left(\frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i|} \right) \tag{3.117}$$

où \vec{p}_i est l’impulsion de la particule i . L’axe du thrust \vec{n}_T est le vecteur unitaire \vec{n} qui maximise l’expression entre parenthèses. Un plan passant par l’origine et perpendiculaire à \vec{n}_T divise l’événement en deux hémisphères, H_1 et H_2 . La valeur de $T = 1$ correspond au cas idéal de deux jets cité plus haut. Dès lors on utilise fréquemment la variable $1 - T$.

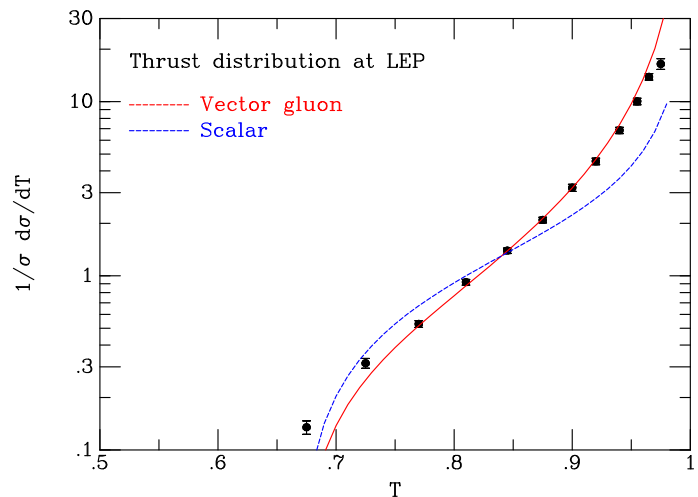
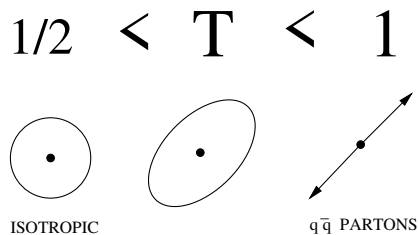


FIGURE 3.18 – Thrust mesuré par l’expérience DELPHI du LEP. Le résultat confirme le caractère vectoriel (spin 1) du gluon (par rapport au comportement attendu pour un gluon scalaire (spin 0)).

La variable M_H est définie comme le maximum des masses invariantes des particules contenues dans un des hémisphères.

Les observables d'étalement des jets B_T et B_W

En construisant la quantité :

$$B_k = \left(\frac{\sum_{i \in H_k} |\vec{p}_i \times \vec{n}_T|}{2 \sum_i |\vec{p}_i|} \right)$$

pour chaque hémisphère, H_k , on définit les variables de *Broadening* :

$$B_T = B_1 + B_2, \text{ et } B_W = \max(B_1, B_2).$$

Transition entre 2 et 3 jets

Dans le cadre de l'algorithme de Durham [12], on définit la valeur de charnière $y_{23}^D = y_{cut}$ pour laquelle chaque événement passe d'une topologie de deux à trois jets.

Les distributions expérimentales des observables de "event shape" obtenues par la Collaboration OPAL sont montrées à la figure 3.19. La définition de l'observable C également montrée sur la figure peut être trouvée par exemple dans la référence [11]. La dépendance en $\alpha_S(s)$ est ajustée séparément pour chaque observable sur la domaine indiqué par les flèches.

Dépendance du thrust en l'énergie du centre de masse

Plus l'énergie dans le centre de masse est grande plus la valeur du thrust est élevée, comme le montre les mesures présentées à la figure 3.20. Cela est dû à la diminution de α_S avec l'énergie qui réduit le taux de radiations à la fois dans le calcul de l'élément de matrice et à la fois dans le patron shower (voir légende de la figure).

3.11 Comparaison des mesures de α_S

En combinant un grand nombre de résultats portant sur la mesure de α_S (voir figure 3.22), sa valeur extrapolée à la masse du Z est actuellement estimée à :

$$\alpha_S(m_{Z^0}) = 0.1162 \pm 0.0020[PDG2021]$$

Dans le cadre de QCD, le couplage est indépendant de la saveur des quarks. Des mesures de α_S ont été effectuées pour différentes saveurs de quarks primaires (voir figure 3.21).

La constante de couplage a donc été mesurée avec précision sur plus de trois ordres de grandeur. Sa diminution avec l'échelle d'énergie est précisément établie et en accord avec les prédictions de QCD dans une approche perturbative. Même aux valeurs les plus hautes en énergie accessibles expérimentalement, l'interaction forte reste malgré tout bien plus importante que les interactions électromagnétiques.

3.12 Test de la structure de jauge de QCD

Nous avons vu jusqu'ici que la distribution angulaire des événements à deux jets a mis en évidence le spin 1/2 des quarks et que les distributions angulaires de événements à trois jets ainsi que la mesure des *event*

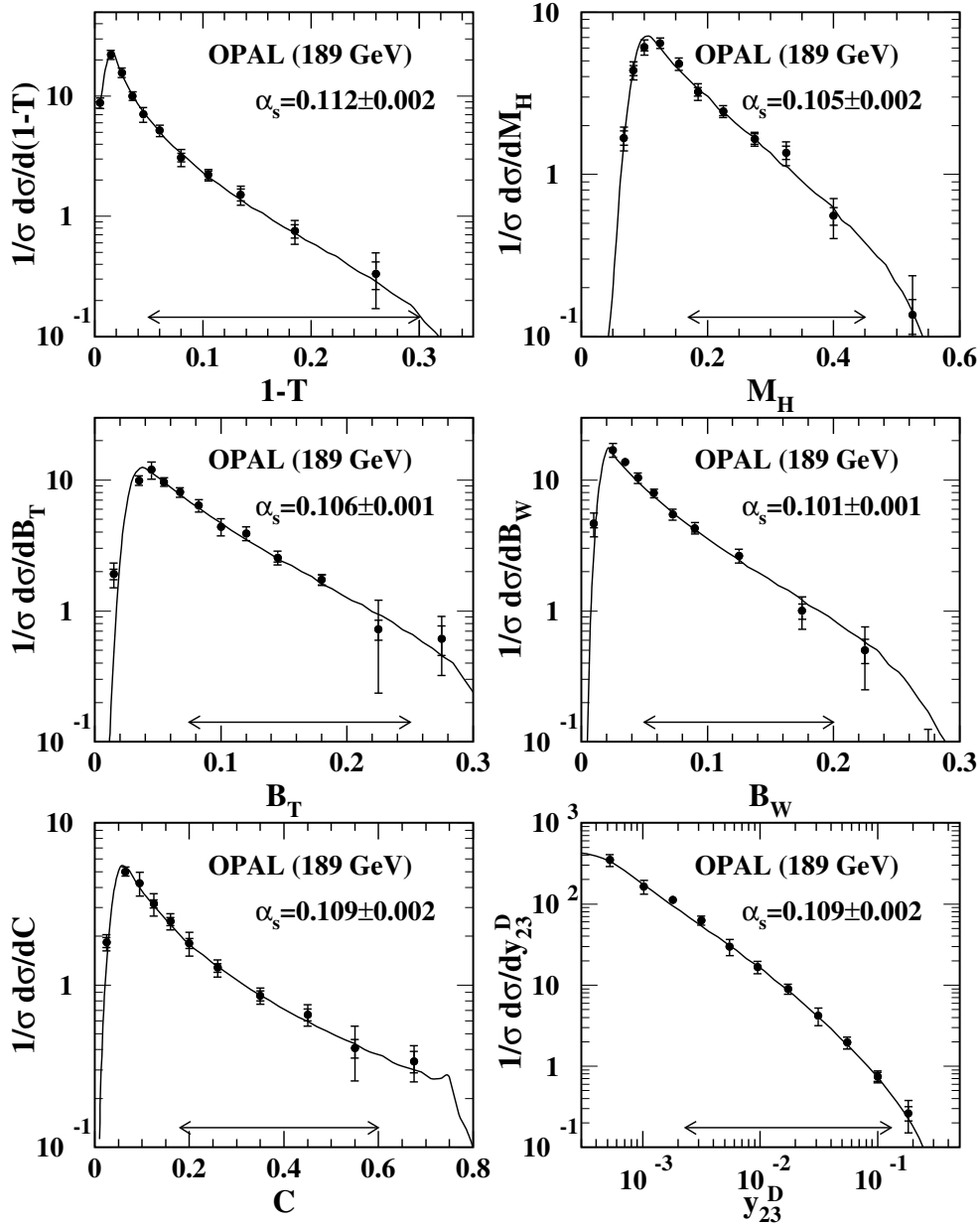


FIGURE 3.19 – Distributions des observables de thrust $1 - T$, de masse M_H , de Broadening B_T et B_W , du paramètre C et de la valeur de transition entre 2 et 3 jets y_{23}^D . Ces mesures de la Collaboration OPAL au LEP sont confrontées avec des ajustements QCD à l'ordre $O(\alpha_s^2)$ +NLLA avec α_s comme paramètre d'ajustement. Les régions sujettes à l'ajustement sont indiquées par des flèches [Eur. Phys. J. C 16 (2000), 185-210 - arXiv :hep-ex/0002012].

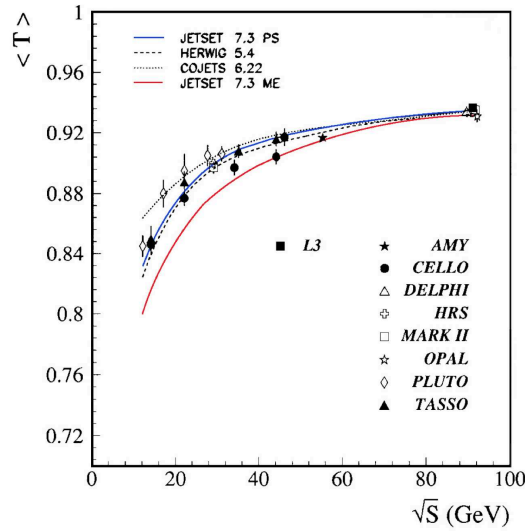


FIGURE 3.20 – Mesures du thrust à différentes énergies dans le centre de masse. Les courbes représentent différentes prédictions. La courbe inférieure (rouge) est basée uniquement sur le calcul de l’élément de matrice, les autres incluent du parton shower, qui rajoute de nombreuses radiations dans l’approximation colinéaire. La courbe bleue reprend la même prédiction que la courbe rouge mais en y ajoutant l’effet du parton shower. Figure extraite de [B. Adeva *et al.*, L3 Coll. Z. Phys. C **55** (1992) 39]

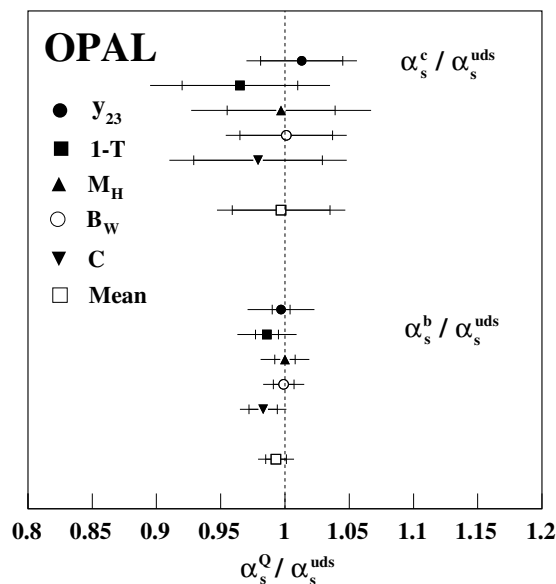
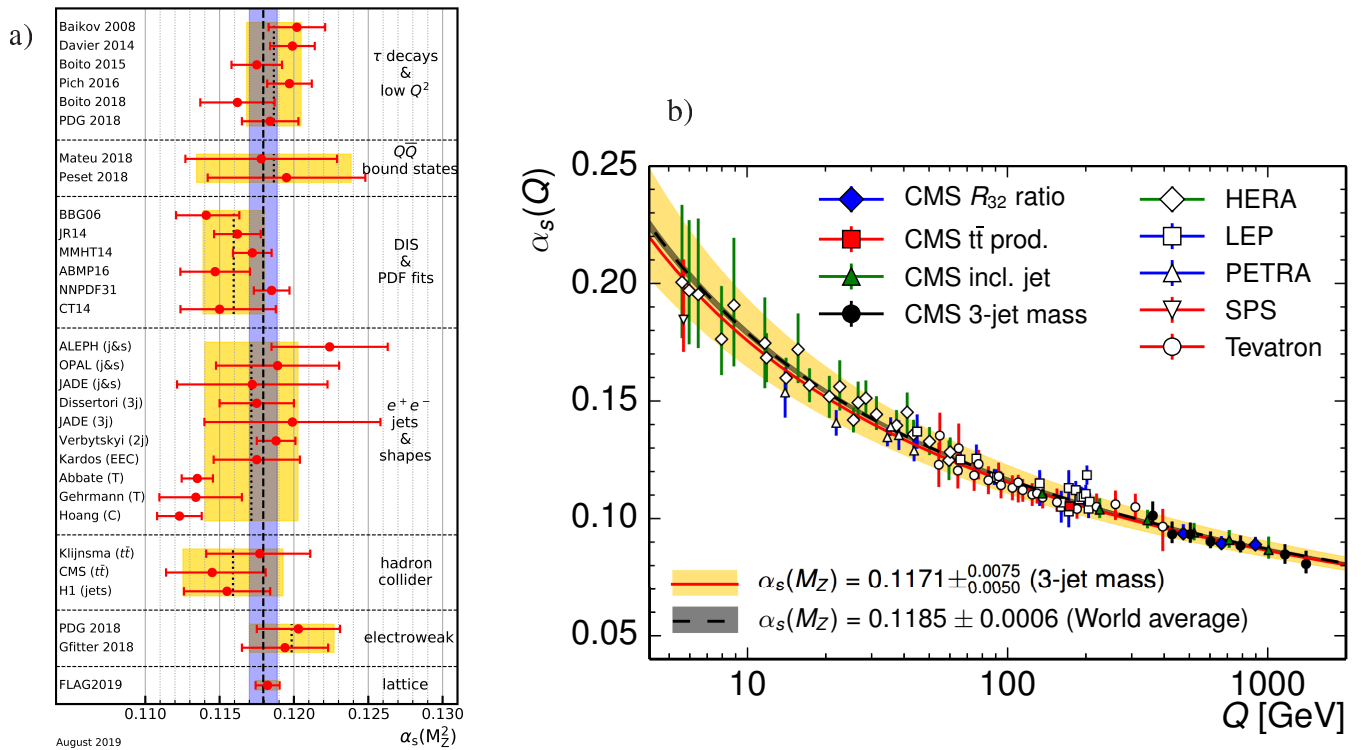
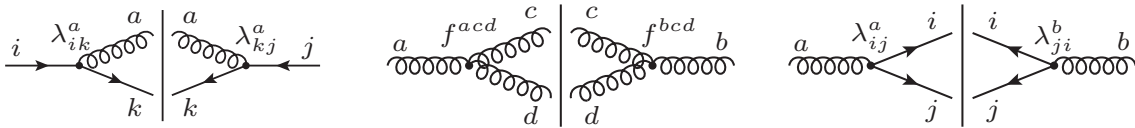


FIGURE 3.21 – Rapport mesurés des valeurs de α_s entre des échantillons contenant différentes saveurs de quarks primaires [OPAL, Eur. Phys. J. C11 (1999) 643-659].



shapes ont mis en évidence le spin 1 des gluons. Une combinaison de mesures indépendantes concordent à la même valeur de α_S et à son évolution avec l'échelle d'énergie, ainsi qu'à l'indépendance de α_S par rapport à la saveur des quarks. En revanche la structure de jauge du groupe, et en particulier son caractère non abélien, n'a pas été mise en évidence si ce n'est de façon indirecte par l'évolution de α_S .

Au LO de QCD, trois vertex fondamentaux contribuent. En les élevant au carré, on trouve les facteurs intervenant dans les sections efficaces :



$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum_a (\lambda_{ik}^a \lambda_{kj}^a) &= 4C_F \delta_{ij} & C_F &= T_F \frac{N^2-1}{N} = \frac{4}{3} \\
 (2) \quad \sum_{cd} f^{acd} f^{bcd} &= C_A \delta_{ab} & C_A &= 2T_F N = 3 \\
 (3) \quad \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) &= 4T_F \delta^{ab} & T_F &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3.118}$$

pour un groupe $SU(N)$ et puis en prenant $N = 3$.

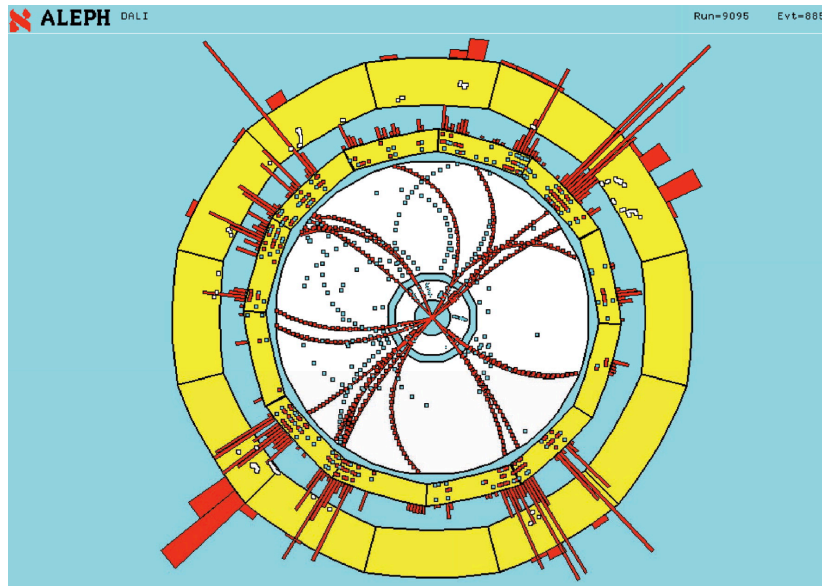


FIGURE 3.23 – Événement du type $e^+e^- \rightarrow 4 \text{ jets}$ dans le détecteur ALEPH au LEP I. Figure extraite de S. Bethke, "QCD studies at LEP", Phys. Rep. 403–404 (2004) 203.

Une façon de vérifier la structure du groupe, c'est-à-dire de mesurer les valeurs de C_F, C_A et T_F est d'analyser les événements à 4 jets (voir un événement type de ALEPH à la figure 3.23). La section efficace peut s'écrire sous la forme :

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha_S}{2\pi}\right)^2 [C_F^2 \mathcal{A} + C_F C_A \mathcal{B} + C_F T_F n_f \mathcal{C}]
 \tag{3.119}$$

Le terme en \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{C} correspondent aux contributions des diagrammes illustrés à la figure 3.24. Notons que dans une théorie abélienne le terme en \mathcal{B} serait absent. Les termes \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des fonctions des

variables cinématiques des jets qui sont indépendantes du groupe de jauge.

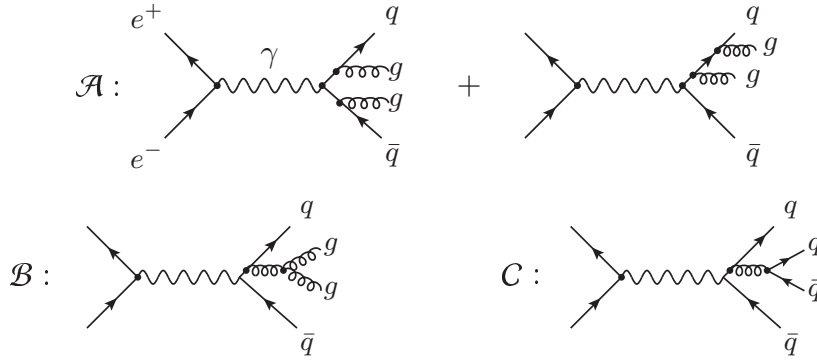


FIGURE 3.24 – Diagrammes contribuant à la production de 4 jets, à l'ordre le plus bas.

En principe on pourrait distinguer une théorie abélienne d'une non abélienne par la mesure de la section efficace, vu que certains termes disparaissent, mais l'incertitude induite par l'échelle de renormalisation est trop importante pour obtenir un résultat probant. On obtient une plus grande sensibilité en étudiant les corrélations angulaires entre jets. On classe tout d'abord les jets par ordre croissant d'énergie

$$E_1 > E_2 > E_3 > E_4,$$

Les jets 1 et 2 sont presque toujours des jets issus de quarks. On s'attend à ce que les dépendances angulaires soient différentes pour les différents termes : \mathcal{A} : $q \rightarrow qg$, soit spin $1/2 \rightarrow 1 + 1/2$, \mathcal{B} : $g \rightarrow gg$, soit spin $1 \rightarrow 1 + 1$ et \mathcal{C} : $g \rightarrow q\bar{q}$, soit spin $1 \rightarrow 1/2 + 1/2$.

De façon à être sensible au vertex à 3 gluons, on définit les angles de Bengtsson-Zerwas

$$\cos \chi_{\text{BZ}} = \left| \frac{(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 \times \vec{p}_2| |\vec{p}_3 \times \vec{p}_4|} \right| \quad (3.120)$$

soit l'angle entre les plans formés par (1,2) et (3,4), et de Nachtmann-Reiter (modifié) :

$$\cos \Theta_{\text{NR}^*} = \left| \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2| |\vec{p}_3 - \vec{p}_4|} \right|, \quad (3.121)$$

correspondant à l'angle entre les vecteurs $(p_1 - p_2)$ et $(p_3 - p_4)$. On corrige pour les effets d'hadronisation par Monte Carlo et on ajuste les rapports C_A/C_F et T_F/C_F aux données.

Les distributions expérimentales obtenues par l'expérience L3 du LEP sont montrées à la figure 3.25.

En combinant ces résultats avec d'autres mesures de l'état final hadronique seul le groupe $SU(3)$ est compatible avec les mesures (le $C_A = N_c = 3$ aussi obtenu par exemple par la mesure du rapport R) et excluent les autres groupes proposés, en particulier un modèle abélien est exclu par plus de 12 déviations standards. D'autres mesures peuvent également être menées, en particulier, comparer les jets de gluons à ceux de quarks (les jets de gluons doivent émettre plus de gluons mous) et les événements à 5 jets qui donnent accès au vertex à 4 gluons.

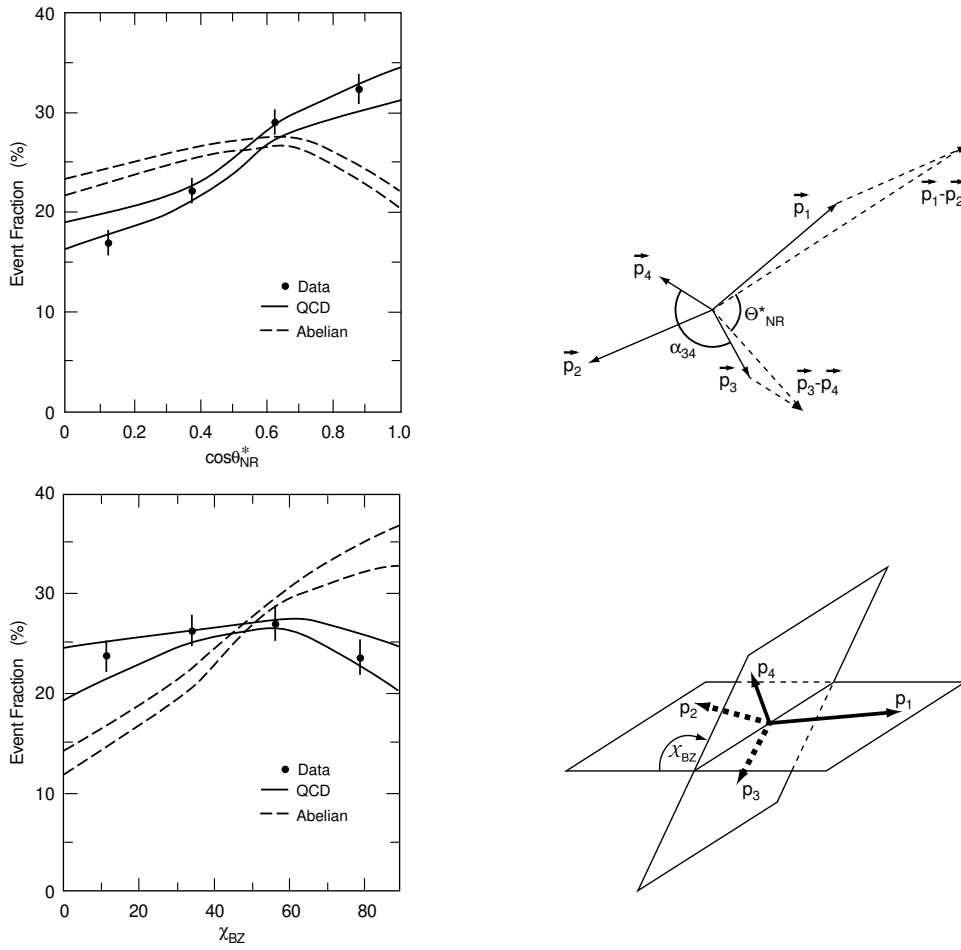


FIGURE 3.25 – Distributions expérimentales des angles de Nachtmann-Reiter et de Bengtsson-Zerwas obtenues par l’expérience L3 au LEP. Les prédictions sont comparées pour un groupe de non abélien $SU(3)$, ici noté QCD et un groupe abélien. Figure extraite de [L3 Coll, Phys. Lett. B **248** (1990) 227].

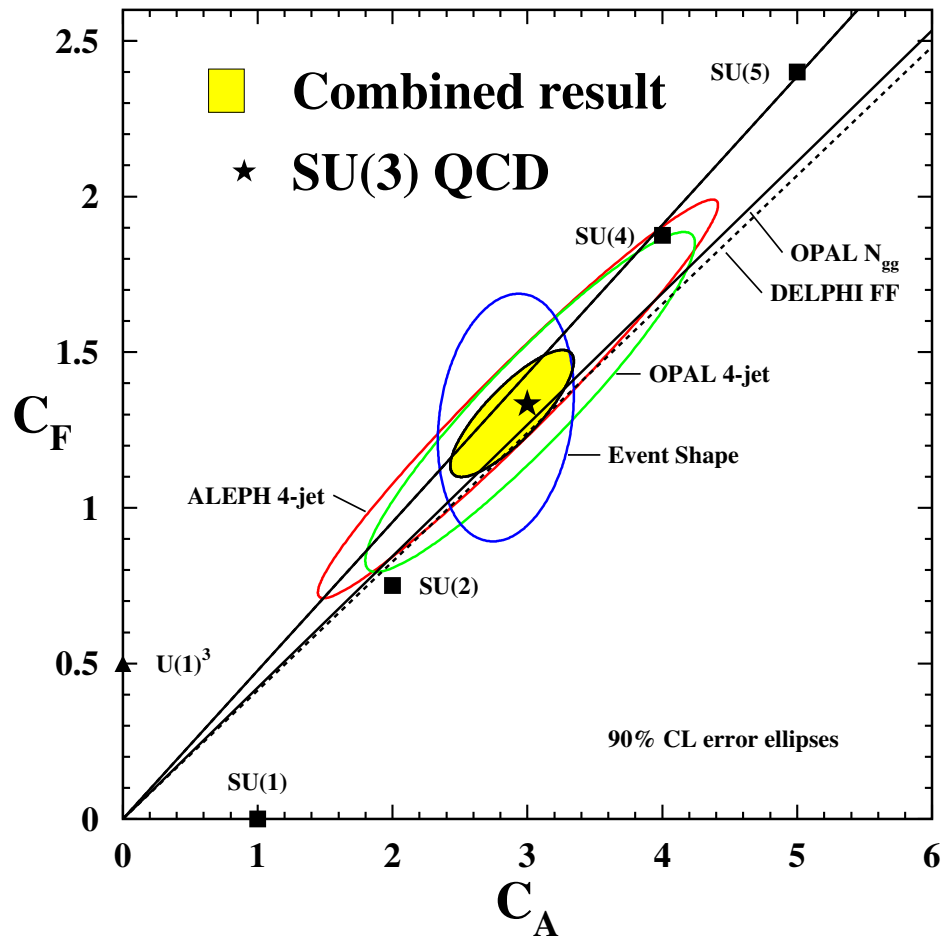


FIGURE 3.26 – Compilation des valeurs ajustées des facteurs du groupe de symétrie de jauge de QCD. Les lignes OPAL N_{gg} est une limite venant de la mesure de la fractions de jets due aux gluons, estimation basée sur le taux de jets enrichis en $c\bar{c}$ et $b\bar{b}$ par rapport à ceux issus des quarks légers u, d, s . La ligne DELPHI FF indique la limite dérivée des mesures de fonctions de fragmentation. Figure extraite de [S. Kluth, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **133** (2004) 36]

Chapitre 4

La diffusion électron-proton

L'approche de la chromodynamique quantique pour décrire les interactions fortes ayant été établie au chapitre précédent, intéressons nous maintenant à la structure hadronique. Dans ce chapitre nous discuterons la diffusion profondément inélastique d'un électron sur un proton, ou plus généralement d'un lepton sur un hadron. Les mesures relatives à ce sujet constituent le test le plus contraignant et le plus probant de QCD et permettent de comprendre la structure hadronique en termes de quarks et de gluons.

On retrouve la base des développements ici présentés dans le Halzen and Martin chapitres 8, 9 et 10 [2]. Plus de détails peuvent être trouvés dans la revue très complète du groupe CTEQ [13]. Enfin un site très complet reprend la plupart des paramétrisations des densités de partons [14].

4.1 De l'atome au nucléon

Dans la première partie de ce chapitre nous allons rapidement passer en revue les mises en évidence des structures de plus en plus petites dans le noyau atomique. Les principes des méthodes expérimentales utilisées sont identiques à celle qui nous permettra de mesurer la structure des nucléons.

4.1.1 Les noyaux atomiques : l'expérience de Rutherford

En 1909, Geiger et Marsden, sous la direction de Rutherford, découvrent l'existence des noyaux atomiques en bombardant des feuilles de métal par des rayons α d'une énergie de 5.5 MeV, en observant un nombre plus important que prévu de particules α diffusées à grand angle (voir figure 4.1).

La section efficace différentielle en l'angle solide, pour la diffusion d'une particule de spin 0 sur un noyau de spin 0, fut déduite en calculant classiquement la force coulombienne agissant sur la particule α . En négligeant le recul du noyau on obtient :

$$\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4E_\alpha^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \alpha = e^2/4\pi \quad (4.1)$$

pour un noyau de charge Ze .

4.1.2 Section efficace de Dirac

Commençons par envisager le cas simplifié de la diffusion d'un électron sur une cible ponctuelle de spin 1/2 et de charge unitaire, comme par exemple proton idéalisé. La section efficace correspondante est

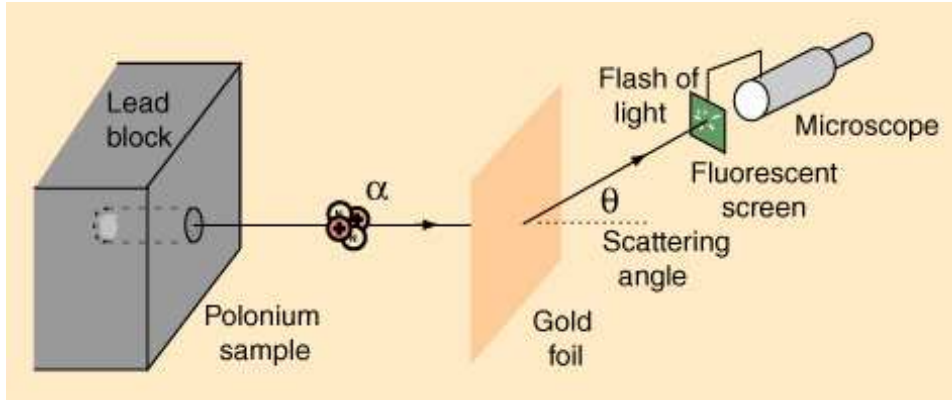
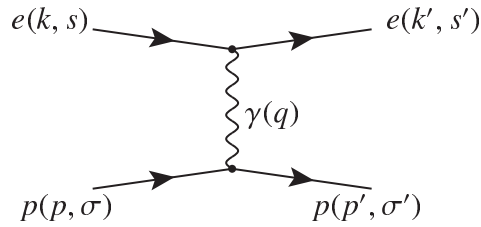


FIGURE 4.1 – Schéma du dispositif expérimental de l'expérience de Rutherford

appelée section efficace de Dirac.



Calcul de la section efficace de Dirac :

L'amplitude de la diffusion est donnée par le produit du courant au vertex leptonique, du propagateur du photon et du courant au vertex hadronique :

$$\mathcal{M} = \langle k', s' | J_\mu^e | k, s \rangle \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \langle p', \sigma' | J_\nu^p | p, \sigma \rangle \quad (4.2)$$

où on note les états d'hélicité s, s' et σ et σ' respectivement pour les électrons et les protons incidents et diffusés. Désignons par $u(k, s)$ et $u(k', s')$ les spineurs des électrons incident et diffusé et en notant $u(p, \sigma)$ et $u(p', \sigma')$ ceux associés aux protons incident et diffusé. Le courant leptonique :

$$\langle k', s' | J_\mu^e | k, s \rangle = -ie \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s). \quad (4.3)$$

Dans le cas présent d'une diffusion sur un proton supposé ponctuel, on a une expression équivalente pour le courant hadronique :

$$\langle p', \sigma' | J_\nu^p | p, \sigma \rangle = -ie \bar{u}(p', \sigma') \gamma_\nu u(p, \sigma). \quad (4.4)$$

On a donc :

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k', s') \gamma_\mu u(k, s) \bar{u}(p', \sigma') \gamma^\mu u(p, \sigma), \quad (4.5)$$

Le carré de l'amplitude invariante moyenné sur les spins de l'état initial et sommé sur ceux de l'état final peut s'écrire sous la forme :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s, s', \sigma, \sigma'} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (4.6)$$

Le tenseur leptonique vaut alors :

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} J_e^\mu J_e^\nu \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} (\bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s)) (\bar{u}(k', s') \gamma^\nu u(k, s))^* \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}(k', s') \gamma^\mu u(k, s) \bar{u}(k, s) \gamma^\nu u(k', s') \quad (4.9)$$

Sans oublier que l'on manipule des matrices. Si l'on écrit explicitement les indices :

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \bar{u}(k', s')_\alpha (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} u(k, s)_\beta \bar{u}(k, s)_\gamma (\gamma^\nu)^{\gamma\delta} u(k', s')_\delta \quad (4.10)$$

Sachant que (outer product) $\sum_s u(k, s) \bar{u}(k, s) = \gamma^\mu k_\mu + m_e = \not{k} + m_e$ et les propriétés $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$ et $\text{tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$ on trouve :

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr}(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + \frac{1}{2} m_e^2 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \quad (4.11)$$

$$= 2(k'^\mu k^\nu + k^\mu k'^\nu - (k \cdot k' + m_e^2) g^{\mu\nu}). \quad (4.12)$$

Les courants leptonique et hadronique étant ici de forme identique, on a :

$$W^{\mu\nu} = 2(p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu - (p \cdot p' + m_p^2) g^{\mu\nu}). \quad (4.13)$$

En effectuant le produit tensoriel :

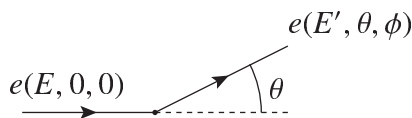
$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[(k \cdot p)(k' \cdot p') + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m_e^2 p \cdot p' - m_p^2 (k' \cdot k) + 2m_e^2 m_p^2 \right] \quad (4.14)$$

Notons que l'on retrouve cette expression à partir de la relation 3.16 développée au chapitre précédent correspondant à la réaction $e^+ e^- \rightarrow q \bar{q}$ et en faisant passer le positon dans l'état final et l'antiquark dans l'état initial¹.

En remplaçant p' par $\bar{p}' = p + k - k'$ et en utilisant la relation $q^2 = -2k \cdot k'$ valable si l'on peut négliger la masse des électrons devant leur impulsion respective :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[\frac{-q^2}{2} (k - k') \cdot p + 2(k \cdot p)(k' \cdot p) + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right] \quad (4.15)$$

Si l'on se place dans le référentiel du laboratoire, c'est-à-dire dans le cas présent dans celui au repos de la cible hadronique, $p = (m_p, 0, 0, 0)$, impliquant :



$$\begin{aligned} p \cdot k &= m_p E, \\ p \cdot k' &= m_p E', \\ k \cdot k' &= E E' (1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (4.16)$$

1. on effectue les substitutions suivantes : $P_e^- \rightarrow k, P_e^+ \rightarrow -k', P_q \rightarrow p, P_{\bar{q}} \rightarrow -p', m_p \rightarrow m_q$, comme une seule couleur entre ici en jeu, $N_c = 0$ et comme charge à celle du proton à la place d'un quark, $Q_i = 1$.

on trouve :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[\frac{-q^2}{2} m_p (E - E') + 2EE' m_p^2 + \frac{m_p^2 q^2}{2} \right] \quad (4.17)$$

$$= \frac{8e^4}{q^4} 2EE' m_p^2 \left[1 - \frac{q^2}{m_p} \frac{E - E'}{4EE'} + \frac{q^2}{4EE'} \right] \quad (4.18)$$

De plus comme dans le présent cas élastique $(p')^2 = m_p^2 = (p + q)^2 \rightarrow 2p \cdot q = -q^2 = Q^2$ ce qui donne

$$E - E' = -\frac{q^2}{2m_p}$$

ce qui montre que plus l'électron perd de l'énergie dans l'interaction, plus la valeur de Q^2 est élevée. On a donc

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16e^4}{q^4} EE' m_p^2 \left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta/2) \right) \quad (4.19)$$

En ce qui concerne l'espace des phases, la conservation de l'énergie-impulsion fait disparaître l'intégration sur p' . Les quadri-vecteurs k et p étant fixés par les conditions initiales expérimentales, l'élément de l'espace des phases disponible se résume à l'électron diffusé.

Après avoir introduit le flux ($1/s = 1/(2m_p E)$) et l'élément de l'espace des phases, la section efficace différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{Dirac}}}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \left[\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta/2) \right] \delta(E - E' + \frac{q^2}{2m_p^2}). \quad (4.20)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \left[1 - \frac{q^2}{2m_p^2} \tan^2(\theta/2) \right] \delta(E - E' + \frac{q^2}{2m_p^2}). \quad (4.21)$$

Le δ représente la condition d'élasticité de la cible.

On retrouve la formule de Mott bien connue (qui inclut le spin 1/2 de la sonde) qui correspond au premier terme.

$$\frac{d\sigma_{\text{Mott}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (4.22)$$

Le second terme, non calculé dans l'approche classique de Mott, provient de la contribution des photons virtuels avec une polarisation longitudinale. Un photon réel ($q^2 = 0$) étant purement transverse, cette contribution n'est présente que pour des photons virtuels ($q^2 < 0$) comme en témoigne le facteur q^2 .

Limite ultra relativiste :

Dans la limite ultra relativiste on peut simplifier l'expression 4.14 en négligeant les termes en m_e et m_p et en introduisant les variables de Mandelstam s , t et u :

$$\begin{aligned} s &= (k + p)^2 = 2p \cdot k, \\ t &= (k - k')^2 = q^2 = -2k \cdot k', \\ u &= (k - p')^2 = (k' - p)^2 = -2p \cdot k', \end{aligned} \quad (4.23)$$

L'élément de matrice s'écrit alors simplement :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad (4.24)$$

Remarquons que cette expression est valable pour toute diffusion élastique de deux particules chargées dans la voie t , donc par exemple $e^- q \rightarrow e^- q$ pour une saveur et une couleur données et en adaptant la charge électrique qui n'est plus unitaire.

Passage de la voie t à la voie s :

En permutant $k' \leftrightarrow -p$ on passe de la voie t à la voie s et l'on obtient l'élément de matrice relatif à la section efficace étudiée au chapitre précédent $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$:

$$|\overline{\mathcal{M}_{e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}}}|^2 = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad (4.25)$$

Dans le système du centre de masse le terme :

$$\frac{t^2 + u^2}{s^2} = 1 + \cos^2 \theta \quad (4.26)$$

En introduisant le terme de flux et l'espace des phases, et en utilisant $\alpha = e^2/4\pi$, on retrouve bien

$$\frac{d\sigma_{e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} e_q^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad \text{et} \quad \sigma(e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e_q^2 \quad (4.27)$$

4.1.3 Diffusion spin 1/2 sur cible nucléaire

Dans les années 1950, un groupe de physicien du Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) et du Massachusetts Institute of Technology (MIT) commença à s'intéresser à la diffusion d'un électron sur des hadrons (noyau atomique, proton en utilisant de l'hydrogène ou proton+neutron en utilisant du deutérium). Ils utilisent un Klystron qui fournit un faisceau d'électrons de 125 MeV.

$$e^- + N \rightarrow e^- + \text{hadrons} \quad (4.28)$$

Grâce aux énergie atteintes (125 MeV), la diffusion d'électrons permet de remonter à la structure de la cible.

Remarque sur la résolution spatiale

Pour résoudre les détails de la densité de charge sur une distance Δr , on utilise la longueur d'onde de de Broglie (λ) de la particule qui interagit (ici le photon échangé) :

$$\lambda = \lambda/2\pi = \Delta r/2\pi = \frac{\hbar c}{p} \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \frac{\hbar c}{p} \quad (4.29)$$

Comme $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$, on a :

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}} \quad (4.30)$$

Dans la limite ultra relativiste ($E \gg m$) on retrouve la relation habituelle $\lambda = \frac{\hbar c}{E}$. Dans la limite des hautes virtualités ($E^2 \ll -m^2 c^4$), on trouve :

$$\lambda = \frac{\hbar c}{Q} \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \frac{\hbar c}{Q} \simeq \frac{2\pi \cdot 0.197}{Q[\text{GeV}]} [\text{fm}] \quad \text{avec} \quad \hbar c = 197 \text{ MeV fm.} \quad (4.31)$$

Pour résoudre une distance Δr , il faut donc des transferts d'impulsion Q supérieurs à :

$\Delta r = 10^{-12}$ m	\longleftrightarrow	$Q > 1$ MeV	\longleftrightarrow	$Q^2 > 0.000001$ GeV ²	(Rutherford)
$\Delta r = 1$ fm	\longleftrightarrow	$Q > 1$ GeV	\longleftrightarrow	$Q^2 > 1$ GeV ²	(taille du proton)
$\Delta r = 10^{-17}$ m	\longleftrightarrow	$Q > M_Z$	\longleftrightarrow	$Q^2 > 10000$ GeV ²	
$\Delta r = 10^{-18}$ m	\longleftrightarrow	$Q > 1$ TeV	\longleftrightarrow	$Q^2 > 1000000$ GeV ²	(LHC)

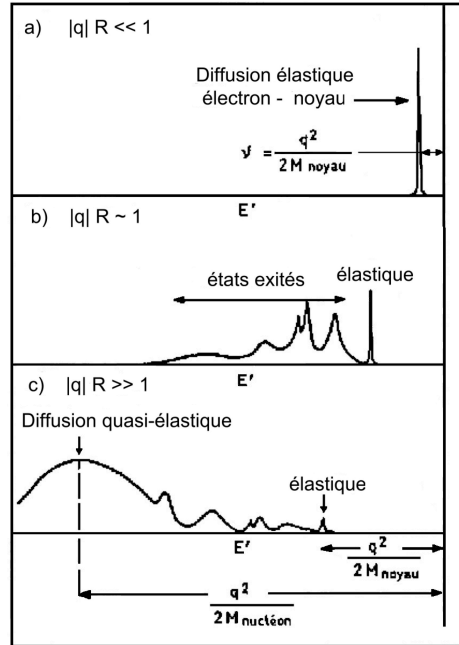


FIGURE 4.2 – Illustration de la réponse du noyau à la diffusion d'électrons en fonction de l'énergie de l'électron diffusé pour différents régimes de transfert d'impulsion q .

Mise en évidence de la structure des noyaux

La figure 4.2 illustre de façon schématique les résultats obtenus, à savoir, la variation de la section efficace électron-noyau en fonction de l'énergie de l'électron diffusé, E' pour différents régimes en le transfert d'impulsion q . Si l'on désigne par R le rayon du noyau et M sa masse, on distingue essentiellement trois régions :

— faibles transferts : $q \ll 1/R$

Seule la diffusion élastique se manifeste par un pic isolé situé à

$$E' = E + \frac{q^2}{2M_{\text{noyau}}} \quad (4.32)$$

Le noyau se comporte comme un objet rigide et inerte de rayon R que l'on mesure par la variation du facteur de forme de son état fondamental $F(q) = 1 - q^2 R^2/6 + \dots$

— transferts moyens : $q \simeq 1/R$

On observe différents états du noyau à basse énergie. Le noyau est excité par des transitions inélastiques à une particule ou par des effets collectifs. La diffusion est cohérente car le noyau recule dans son ensemble. Les états finals du noyau sont bien séparés par différentes valeurs.

— grands transferts : $q \gg 1/R$

L'intensité des processus cohérents est beaucoup plus faible à cause de la décroissance de leurs facteurs de forme $F(q^2)$. Le phénomène nouveau est l'apparition d'une bosse très large dont le maximum est situé à

$$E' = E + \frac{q^2}{2M_{nucleon}} \quad (4.33)$$

Dans cette région l'énergie de recul est entièrement absorbée par le nucléon comme s'il était quasiment libre. S'il était totalement libre, on ne verrait qu'un pic étroit. C'est le mouvement de Fermi des nucléons dans un potentiel moyen qui provoque un élargissement analogue à l'effet Doppler.

4.2 Diffusion spin 1/2 sur nucléon

4.2.1 Prémisses expérimentales

En bombardant une cible des nucléons d'électrons du faisceau de 125 MeV (expérience MARK III), Hofstadter et ses collaborateurs [16] arrivent à déterminer pour la première fois les distributions électriques et magnétiques du nucléon. Ce travail valut le prix Nobel de physique à Robert Hofstadter et Rudolf Ludwig Mössbauer en 1961.

Une déviation aux grands angles de diffusion est observée par rapport à la prédiction pour une particule ponctuelle de spin 1/2 (figure 4.3a - courbe rouge (section efficace de Dirac). On peut rendre compte de ces mesures en multipliant la section efficace de Dirac par une fonction décroissante en fonction Q :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = \frac{d\sigma_{Dirac}}{d\Omega_e} |G_E(Q)|^2 \quad (4.34)$$

Plus Q augmente moins la section efficace est grande, comme si lorsque la résolution spatiale augmentait, l'interaction ne se déroulait avec une charge effective inférieure à celle du proton.

La fonction G_E est appelée **facteur de forme électrique**. Il est interprété comme la transformée de Fourier de la distribution de charges électriques de la cible :

$$G_E(Q) = \int d^3r \rho(r) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{Q}} \quad \text{avec} \quad G_E(0) = 1 \quad (4.35)$$

afin de conserver la normalisation. Si $|q|$ n'est pas trop grand on peut faire un développement en série

$$G_E(Q) = \int \left(1 + i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})^2}{2} + \dots \right) \rho(r) d^3r \quad (4.36)$$

En supposant que la densité de charge est à symétrie sphérique, c'est-à-dire $\rho(r) = \rho(-r)$, le second terme du développement en série ne contribue pas à l'intégrale (ainsi que tous les termes d'ordre impair).

Le rayon carré moyen de la cible est donné par :

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) d^3r = 4\pi \int r^2 \rho(r) r^2 dr \quad (4.37)$$

On trouve donc :

$$G_E(Q) \simeq 1 + 0 - \frac{Q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \dots \quad (4.38)$$

On peut donc estimer le rayon typique de la cible, ici $\langle r^2 \rangle^{1/2} \simeq 0.74 \pm 0.24 \cdot 10^{-15}$ m pour le proton.

Lorsque $Q \rightarrow \infty$ le comportement des facteurs de forme nous renseigne sur la nature ponctuelle des constituants de la cible. Si la distribution de charge a une extension spatiale finie, le facteur de forme décroît et tend vers une constante. Pour une charge ponctuelle $G_E(Q) = cst.$

En faisant les choses plus rigoureusement, c'est-à-dire en généralisant la section efficace de Dirac en introduisant aussi un terme magnétique, la section efficace s'exprime comme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e} = \left[\frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \right]_{Mott} \frac{E'}{E} \left(\frac{|G_E(Q)|^2 + \tau |G_M(Q)|^2}{1 + \tau} + 2\tau |G_M(Q)|^2 \tan^2 \theta/2 \right). \quad (4.39)$$

Où la variable $\tau \equiv Q^2/4M_N^2$, et M_N la masse du noyau. Les fonctions $G_E(Q)$ et $G_M(Q)$ sont les facteurs de formes électrique et magnétique.

Les facteurs de forme qui sont extraits des mesures (figure 4.3b) montrent une décroissance rapide avec Q^2 . On les paramétrise en général sous la forme, dite de dipôle :

$$|G(Q)| \sim \frac{1}{(1 + Q^2/\mu_0^2)^2} \quad \longleftrightarrow \quad \rho(r) = \rho_0 e^{-\mu_0 r}, \quad (4.40)$$

où $\mu_0^2 \sim 0.71 \text{ GeV}^2$. Cette forme est analogue à celle des états liés non relativistes possédant une distribution de charge électrique étendue. Cela suggère donc la présence d'une sous-structure dans le nucléon mais laisse sa nature mystérieuse.

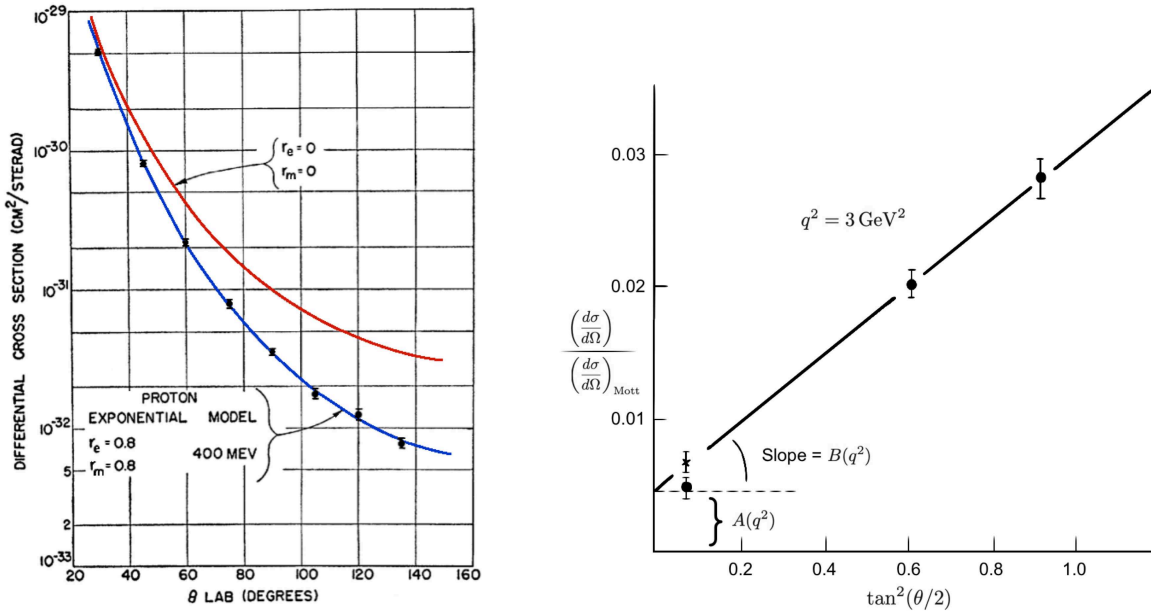


FIGURE 4.3 – a) Résultats de Hofstadter et al. : section efficace en fonction de l'angle polaire de diffusion de l'électron [R. Hofstadter, Rev. Mod. Phys. 56 (1956) 214]. La courbe rouge donne la prédiction dans le cas d'un proton de rayons électrique et magnétique nuls. b) Méthode de détermination du facteur de forme électrique et magnétique

Aux énergies atteintes jusqu'ici la diffusion de l'électron laisse le proton principalement intact. On parle de diffusion élastique. Lorsque l'énergie du faisceau augmente, des échanges d'impulsion plus importants deviennent possibles, les interactions peuvent alors devenir quasi-élastiques ou même *profondément inélastiques*.

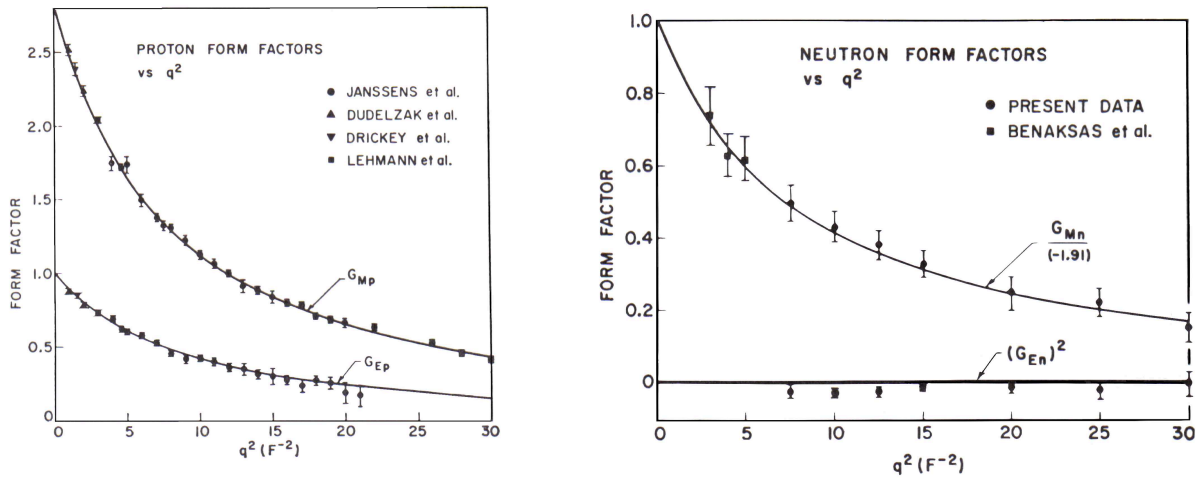


FIGURE 4.4 – Facteurs de forme élastique du proton et du neutron, exprimés en [fm^{-2}].

La figure 4.5 illustre les liens entre les distributions de densité de charges et les facteurs de forme.

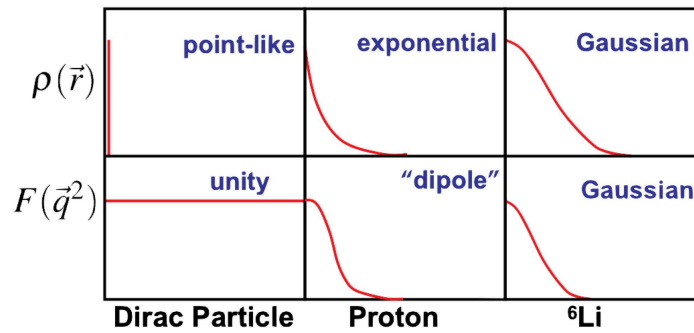


FIGURE 4.5 – Illustration des liens entre les distributions de densité de charges et les facteurs de forme.

4.3 Diffusion profondément inélastique

Grâce au développement de faisceaux d'électrons de plus haute énergie le domaine cinématique est étendu aux grandes valeurs de Q^2 (contraint par la limite cinématique $Q^2 < s$) et permet de sonder le nucléon à de plus petites échelles.

4.3.1 Premières mesures au SLAC

En 1967 commença une longue série d'expériences de diffusion dites profondément inélastiques. La première prit place au Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) utilisant de l'hydrogène liquide et ensuite une cible de deutérium bombardée par un faisceau d'électrons allant jusqu'à 21 GeV[15]. La contribution de cette expérience à notre connaissance de la diffusion inélastique fut récompensée par le prix Nobel de physique en 1990 attribué à Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall et Richard E. Taylor.

Dans ce type d'expérience, seul l'électron diffusé est mesuré, on n'observe donc pas directement l'état final hadronique. Mais on peut calculer sa masse invariante W par la relation :

$$W^2 = (q + p)^2 = X^2 = q^2 + 2p \cdot q + m_p^2 \tag{4.41}$$

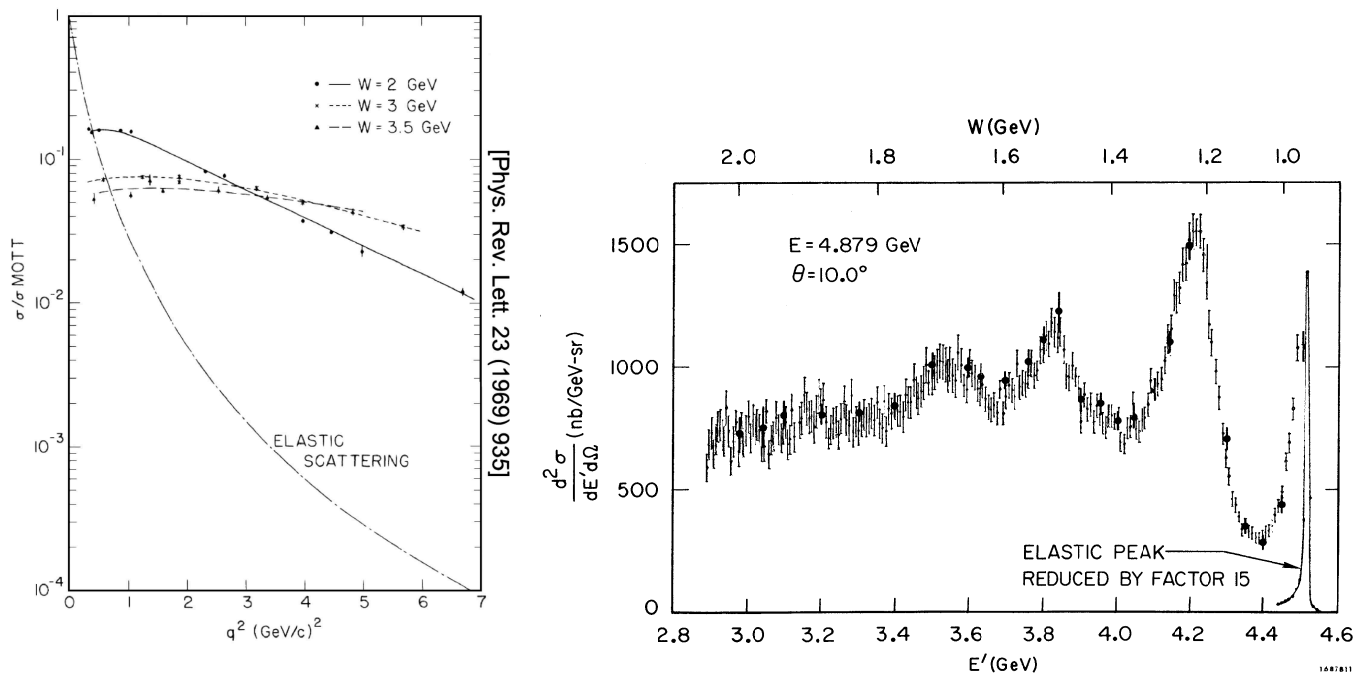
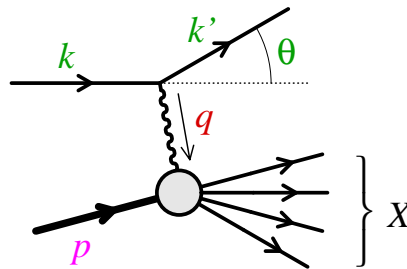


FIGURE 4.6 – Résultats du SLAC. a) Une dépendance beaucoup plus douce est observée par rapport à la diffusion élastique (Mott). b) Distribution de la masse invariante hadronique. L'énergie du centre de masse photon-proton, W , est donnée par $W^2 = \frac{E-E'}{E} s$ [SLAC-PUB-796 (1970)]. Les gros points sont les mesures SLAC, les fins de DESY [Phys. Lett. B28 (1968) 148].

où la définition des quadri-vecteurs est reprise ci-dessous



Il est commode d'introduire l'invariant relativiste x , initialement introduite par Björken, compris entre 0 et 1 :

$$x = \frac{Q^2}{2 p \cdot q}. \tag{4.42}$$

On peut alors réexprimer W comme :

$$W^2 = m_p^2 + \frac{1-x}{x} Q^2. \tag{4.43}$$

On définit également l'invariant y :

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}. \tag{4.44}$$

Dans le référentiel où le proton est au repos, celui-ci s'identifie à la fraction d'énergie que l'électron a cédé au boson échangé $y = (E - E')/E$. La variable y correspond donc à une mesure de l'inélasticité du processus de diffusion et $0 \leq y \leq 1$.

Les invariants cinématiques sont liés par la relation :

$$Q^2 = x y s. \tag{4.45}$$

qui nous permet de déduire que $Q^2 \leq s$, où s est le carré de l'énergie disponible dans le centre de masse.

La mesure de la section efficace divisée par le terme de Mott est montrée à la figure 4.6 de gauche pour différentes valeurs de W . Ce rapport de section efficace est beaucoup plus doux que si le proton restait élastique. Dans le cas élastique, c'est-à-dire pour $W = m_p$, les facteurs de forme imposent une décroissance rapide avec q^2 . La figure 4.6 de droite montre cette structure non élastique.

La condition d'élasticité imposée par le $\delta(E - E' + q^2/2m_p)$ de l'équation 4.21 n'est ici clairement plus respectée. Dans les termes des variables cinématiques invariants de Lorentz que l'on vient d'introduire, cette condition correspond à :

$$W^2 = m_p^2 + \frac{1-x}{x} Q^2 = m_p^2 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad (4.46)$$

Pour traiter les diffusions inélastiques il nous faut donc se libérer du δ et introduire des fonctions inconnues qui rendront compte de la complexité de la structure de la cible :

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \left[\frac{\alpha^2}{2sE \sin^4(\theta/2)} \right] \left(2 \sin^2(\theta/2) W_1(x, Q^2) + \cos^2(\theta/2) W_2(x, Q^2) \right), \quad (4.47)$$

Les fonctions W_1 et W_2 sont appelées les **fonctions de structures**, elles dépendent a priori des deux degrés de libertés, pour lesquels on choisit les variables x et Q^2 . Elles sont a priori différentes pour les différentes cibles hadroniques.

Les mesures de W_2 sont présentées à la figure 4.7 en fonction de l'énergie du photon $\nu = E - E' = p \cdot q / m_p$ pour différentes valeurs de Q^2 . Pour extraire la fonction W_2 à partir de la mesure de la section efficace, les auteurs ont supposé que le terme en W_1 donnait une contribution négligeable à la section efficace par rapport à celle du terme en W_2 .

Qu'observe-t-on ?

- plus Q^2 augmente, plus la partie inélastique l'emporte sur le pic élastique et sur les résonances. En d'autres termes plus le pouvoir de résolution est grand plus la probabilité d'interagir avec le proton dans son ensemble (pic élastique et résonances) est petite.
- un comportement asymptotique remarquable indépendant de Q^2 aux grandes valeurs de ν . C'est l'**invariance d'échelle**.

La mise en évidence de l'invariance d'échelle est la plus claire en présentant νW_2 en fonction de Q^2 (noté q^2) pour une valeur donnée de $\omega = 4 \rightarrow x = 0.25$. Cela implique que

$$\nu W_2(x, Q^2) = \nu W_2(x) \quad (4.48)$$

ce qui physiquement signifie que (dans ce régime cinématique et endéans les incertitudes de mesure) tout apparaît comme s'il y avait des objets ponctuels dans le proton (voir figure 4.8 de gauche) puisque quelle que soit l'échelle de résolution la structure du proton apparaît identique.

De plus la relation

$$2m_p W_1(x) = \frac{\nu W_2(x)}{x} \quad (4.49)$$

semble être vérifiée expérimentalement (voir figure 4.8 de droite).

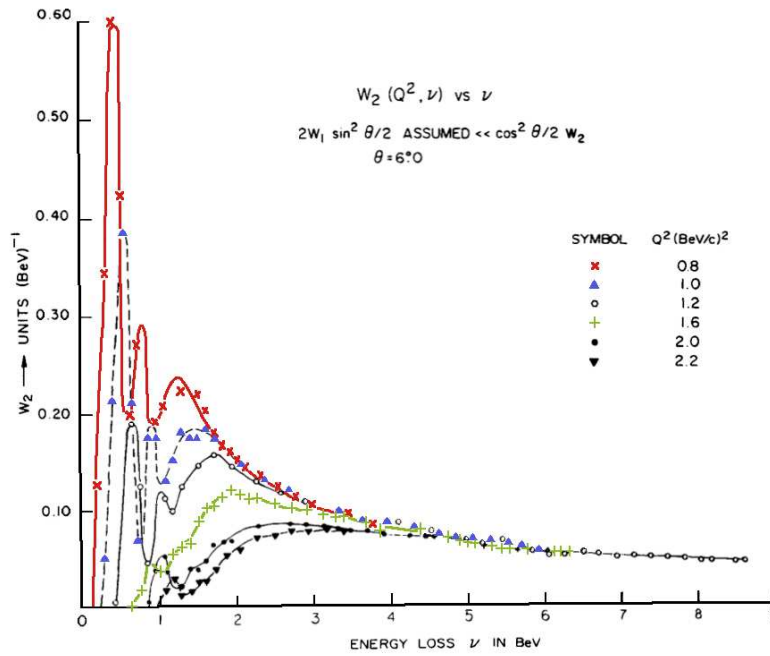


FIGURE 4.7 – Mesures de la fonction de structure W_2 en fonction de l'énergie portée par le photon (ν) pour différentes valeurs de Q^2 [SLAC-PUB-907 (1970)]. Les BeV (billions of eV) sont équivalents à des GeV.

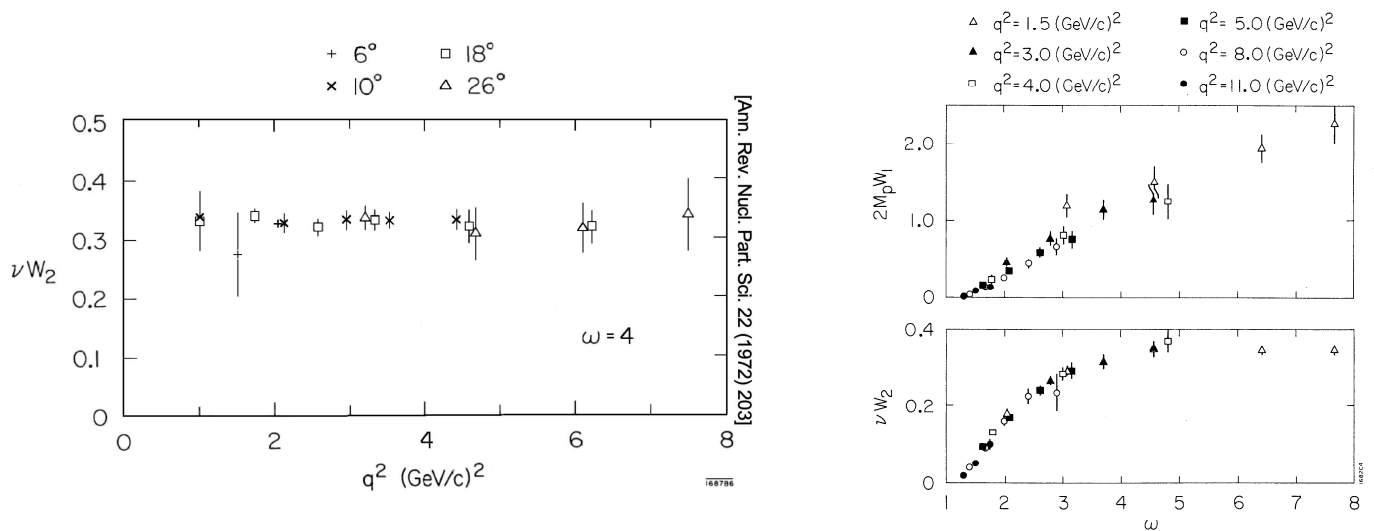


FIGURE 4.8 – Résultats du SLAC. Mise en évidence de l'invariance d'échelle [SLAC-PUB-796 (1970)].

4.4 Les fonctions de structure

Pour accéder à la structure du proton, il faut augmenter la virtualité du photon échangé Q^2 . Cela a aussi pour conséquence, comme nous venons de le voir, de rompre le caractère élastique de la réaction. Pour réécrire la section efficace de la façon la plus générale possible, il faut a priori donner au tenseur hadronique $W_{\mu\nu}$ la forme la plus générale qui soit. Si on se limite aux analyses non polarisées, la moyenne sur les états d'hélicité fait disparaître les termes en γ^μ . D'autre part nous n'avons à notre disposition que les quadri-vecteurs q et p et les invariants Q^2 et x qui en découlent. On écrit donc le tenseur $W_{\mu\nu}$ comme :

$$W_{\mu\nu} = -W_1 g_{\mu\nu} + \frac{W_2}{m_p^2} p_\mu p_\nu + \frac{W_3}{m_p^2} (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + \frac{W_4}{m_p^2} (p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu) + \frac{W_5}{m_p^2} q_\mu q_\nu + \frac{W_6}{m_p^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho q^\sigma, \quad (4.50)$$

où $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur totalement antisymétrique et les W sont des fonctions sans dimension, a priori inconnues et dépendantes de x et Q^2 .

Les contributions antisymétriques (termes en W_4 et W_6) disparaîtront lors de la contraction avec le tenseur leptonique $L^{\mu\nu}$ qui est symétrique. La conservation du courant hadronique :

$$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0 \quad (4.51)$$

implique :

$$-W_1 q_\nu + \frac{W_2}{m_p^2} (p \cdot q) p_\nu + \frac{W_3}{m_p^2} ((p \cdot q) q_\nu + q^2 p_\nu) + \frac{W_5}{m_p^2} q^2 q_\nu = 0 \quad (4.52)$$

Ce qui implique deux relations :

$$\text{termes en } q_\nu : \quad -W_1 + \frac{W_3}{m_p^2} (p \cdot q) + \frac{W_5}{m_p^2} q^2 = 0 \quad (4.53)$$

$$\text{termes en } p_\nu : \quad \frac{W_2}{m_p^2} (p \cdot q) + \frac{W_3}{m_p^2} q^2 = 0 \quad (4.54)$$

soit encore :

$$W_3 = -\frac{q \cdot p}{q^2} W_2 \quad (4.55)$$

$$W_5 = \frac{(q \cdot p)^2}{q^4} W_2 + \frac{m_p^2}{q^2} W_1 \quad (4.56)$$

Il ne reste donc que deux fonctions indépendantes. On peut alors réécrire le tenseur sous la forme :

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(x, Q^2) + \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}. \quad (4.57)$$

Sa contraction au tenseur leptonique, en négligeant la masse de l'électron (et donc $k \cdot k' = k \cdot (k - q) = -k \cdot q = -\frac{1}{2}q^2$), mène à :

$$L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 4 k \cdot k' W_1(x, Q^2) + \left(4 (p \cdot k) (p \cdot k') - 2 m_p^2 k \cdot k' \right) \frac{W_2(x, Q^2)}{m_p^2}$$

En se plaçant dans le référentiel du proton au repos, en faisant usage des relations 4.16, en incorporant les termes de flux et d'espace des phases, on retrouve la relation 4.47 :

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(x, Q^2) + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(x, Q^2) \right) \quad (4.58)$$

$$= \frac{\alpha^2}{2sE \sin^4(\theta/2)} \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(x, Q^2) + \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(x, Q^2) \right), \quad (4.59)$$

En effectuant le changement de variables $(E', \cos \theta) \rightarrow (x, Q^2)$ pour lequel on a :

$$dx dQ^2 = \frac{2x E'}{y} dE' d\cos \theta, \quad (4.60)$$

la section efficace peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{\alpha^2 y E'}{x Q^4 m_p} \left[2 \sin^2(\theta/2) W_1(x, Q^2) + \cos^2(\theta/2) W_2(x, Q^2) \right]. \quad (4.61)$$

En utilisant l'égalité :

$$y E' \sin^2(\theta/2) = \frac{m_p x y^2}{2} \quad (4.62)$$

et en définissant les quantités $F_1(x, Q^2)$ et $F_2(x, Q^2)$ au travers des relations :

$$4\pi F_1(x, Q^2) = W_1(x, Q^2), \quad (4.63)$$

$$4\pi m_p F_2(x, Q^2) = \nu W_2(x, Q^2), \quad (4.64)$$

on obtient :

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} \left\{ x y^2 \left[F_1(x, Q^2) - \frac{m_p}{2\nu} F_2(x, Q^2) \right] + (1-y) F_2(x, Q^2) \right\}. \quad (4.65)$$

En se plaçant alors dans les conditions du régime asymptotique de Björken :

$$\begin{aligned} s, \nu &\rightarrow \infty, \\ Q^2 &\rightarrow \infty, \\ x &\text{ fixé } , \end{aligned} \quad (4.66)$$

la section efficace différentielle inclusive de la diffusion $e p \rightarrow e X$ s'écrit finalement :

$$\boxed{\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} \left[x y^2 F_1(x, Q^2) + (1-y) F_2(x, Q^2) \right]}. \quad (4.67)$$

Les grandeurs $F_1(x, Q^2)$ et $F_2(x, Q^2)$ portent le nom de fonctions de structure. Elles contiennent l'ensemble de l'information relative à la dynamique de la partie hadronique du processus de diffusion.

Remarque : Dans le cas élastique discuté au début du chapitre le facteur de forme électrique introduit reviendrait à écrire $W_{\mu\nu} = 4p_\mu p_\nu G_E(Q^2)^2$

Sections efficaces longitudinale et transverse

On peut s'intéresser aux contributions à la section efficace des événements issus de photons virtuels polarisés longitudinalement et transversalement. En séparant les composantes transverses ($\lambda = \pm 1$) et longitudinale ($\lambda = 0$) du vecteur de polarisation $\epsilon(\lambda)$ dans le calcul on obtient :

$$\frac{d^2\sigma_T}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} x [1 + (1-y)^2] F_1(x, Q^2) \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_L}{dx dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} (1-y) [F_2(x, Q^2) - 2x F_1(x, Q^2)] \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{x Q^4} (1-y) F_L(x, Q^2) \end{aligned} \quad (4.69)$$

La fonction de structure F_1 correspond donc à la section efficace transverse, et la section efficace longitudinale dépend à la fois de F_1 et F_2 , soit encore d'une fonction de structure longitudinale, F_L , définie par la relation ci-dessus, c'est-à-dire :

$$F_L(x, Q^2) = F_2(x, Q^2) - 2x F_1(x, Q^2). \quad (4.70)$$

On peut donc encore réécrire la section efficace sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{x Q^4} \left\{ [1 + (1-y)^2] F_2(x, Q^2) - y^2 F_L(x, Q^2) \right\} \quad (4.71)$$

$$= \frac{2\pi\alpha^2}{x Q^4} \left[1 + (1-y)^2 - y^2 \frac{R}{1+R} \right] F_2(x, Q^2), \quad (4.72)$$

où R est le rapport entre les sections efficaces longitudinale et transverse :

$$R = \frac{\sigma_L(\gamma^* p \rightarrow X)}{\sigma_T(\gamma^* p \rightarrow X)} = \frac{F_L(x, Q^2)}{2x F_1(x, Q^2)}. \quad (4.73)$$

4.4.1 Nouvelle vision des données SLAC

Si nous regardons à nouveau les mesures effectuées au SLAC dans les années 1960, mais cette fois avec une approche reposant sur le formalisme des fonctions de structure, on observe (figure 4.9 de gauche) que malgré le large domaine couvert en Q^2 par les mesures, la fonction de structure F_2 semble indépendante de la valeur de Q^2 .

La figure 4.9 de droite montre séparément les contributions de F_2 et F_L à une valeur fixée de Q^2 .

A $Q^2 \simeq 0$ le photon échangé étant purement transverse, on s'attend à ce que R et $F_L \rightarrow 0$ pour $Q^2 \rightarrow 0$.

4.5 Le modèle des partons

L'absence de dépendance en Q^2 observée dans les données de SLAC permet de comprendre la motivation du *modèle des partons* introduit par Feynman : l'interaction a lieu sur des objets ponctuels constituants du proton, il les appelle les *partons* qui n'interagissent pas entre eux. Ces partons ont une charge électrique et un spin 1/2. Ils seront identifiés aux quarks quelques années plus tard.

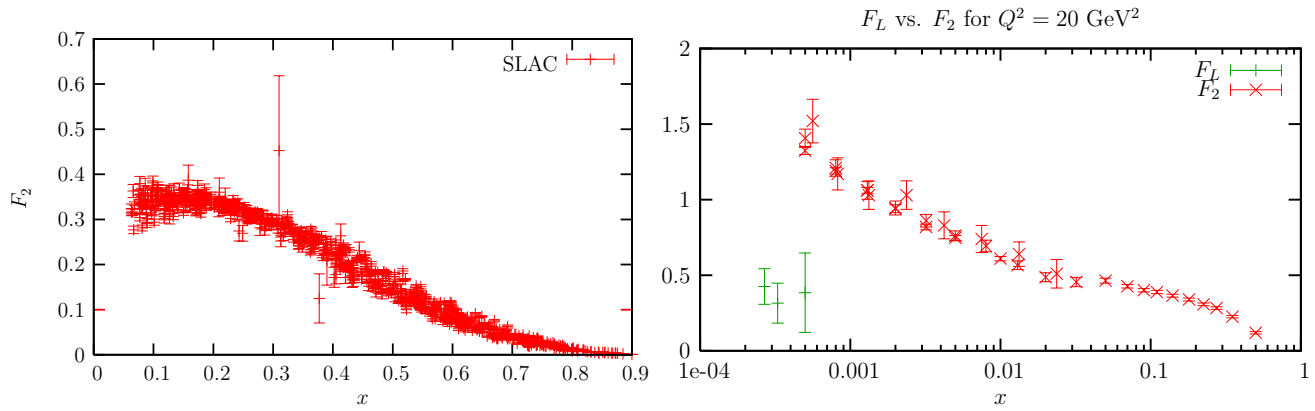
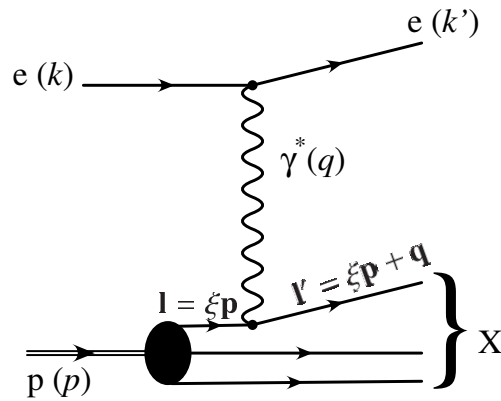


FIGURE 4.9 – Mesure des fonctions de structure du proton au SLAC. La figure de gauche présente les mesures de la fonction de structure F_2 pour un grand ensemble de données correspondant à des valeurs de Q^2 différentes. La figure de droite présente F_2 et F_L pour la valeur $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$.

Le modèle des partons de la diffusion profondément inélastique se formule plus aisément dans le référentiel de Breit², ou "infinite momentum frame", dans lequel le proton est ultra relativiste, i.e. $p \gg m_p$ et donc $p = (p, 0, 0, p)$. Il considère que le photon interagit avec un quark (l'interaction ne peut pas avoir lieu avec les gluons qui n'ont pas de charge électrique) ponctuel portant une fraction de l'impulsion du proton et se déplaçant parallèlement à lui : $l^\mu = \xi p^\mu$



Les quarks étant de spin 1/2, la section efficace sera donnée par l'équation de Dirac 4.21 dérivée dans le cas élastique, qui donne en remplaçant p^μ par ξp_q^μ et en utilisant la charge électrique du quark e_q :

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}_{eq \rightarrow eq}}{dx dQ^2}(\xi) = \frac{2\pi e_q^2 \alpha^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \delta(x - \xi). \quad (4.74)$$

La section efficace inclusive de la diffusion profondément inélastique (ou DIS en anglais pour Deep Inelastic Scattering) $ep \rightarrow eX$ s'écrit comme l'intégrale sur la fraction d'impulsion ξ des sommes des

2. L'interprétation que nous ferons ici reste cependant valable dans tout référentiel où l'on peut négliger la masse du proton face à son impulsion

contributions des quarks et antiquarks des différentes saveurs :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma_{ep \rightarrow eX}}{dx dQ^2} &= \int_0^1 d\xi \sum_q f_q(\xi) \frac{d^2\hat{\sigma}_{eq \rightarrow eq}}{dx dQ^2}(\xi, Q^2) \\
&= \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \int_0^1 d\xi \sum_q e_q^2 f_q(\xi) [1 + (1-y)^2] \delta(x - \xi) \\
&= \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \int_0^1 d\xi \sum_q e_q^2 f_q(\xi) [y^2 + 2(1-y)] \delta(x - \xi)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Une simple comparaison entre cette équation et celle de la section efficace inclusive du processus DIS 4.67 (comparer les termes en y^2 et en $(1-y)$) permet d'établir le liens entre les fonctions de structure $F_1(x, Q^2)$ et $F_2(x, Q^2)$ et les densités partoniques :

$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \sum_q e_q^2 f_q(\xi) \delta(x - \xi) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 f_q(x) \tag{4.76}$$

$$F_2(x, Q^2) = \int_0^1 d\xi \sum_q e_q^2 x f_q(\xi) \delta(x - \xi) = \sum_q e_q^2 x f_q(x) \tag{4.77}$$

En séparant les densités des quarks et des antiquarks, on peut écrire :

$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 f_q(x) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 [q(x) + \bar{q}(x)] = F_1(x), \tag{4.78}$$

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 x f_q(x) = \sum_q e_q^2 x [q(x) + \bar{q}(x)] = F_2(x). \tag{4.79}$$

La section efficace $eq \rightarrow eq$ n'ayant d'autre dépendance en Q^2 que le propagateur du photon, les fonctions de structures, dans le modèle naïf des partons libres, sont donc bien indépendantes de Q^2 .

La fonction de structure F_2 représente donc la somme sur toutes les saveurs des distributions de probabilité de présence d'un quark portant une fraction d'impulsion x . En fait seul F_2 a ici de l'importance car on retrouve la relation de Callan-Gross :

$$F_2(x) = 2x F_1(x) \quad \Rightarrow \quad F_L(x) = F_2(x) - 2x F_1(x) = 0. \tag{4.80}$$

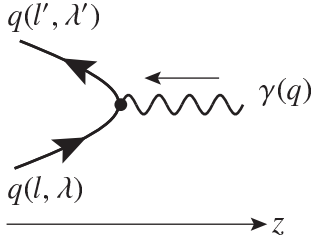
ce qui est le reflet de la conservation de l'hélicité des quarks (de spin 1/2).

Conservation de l'hélicité

La non contribution des photons longitudinaux ($F_L = 0$) est due à la conservation de l'hélicité (uniquement valable dans l'approximation des masses des quarks nulles). Dans le référentiel de Breit, défini comme celui dans lequel le photon virtuel a une énergie nulle, on a (en choisissant l'axe z comme celui de propagation du photon) :

$$q = (q_0, \vec{q}_T, q_3) = (0, \vec{0}, -Q) \quad (4.81)$$

à partir de la définition de x , on trouve :



$$\begin{aligned} p &= (p_0, \vec{p}_T, p_3) = \left(\frac{Q}{2x}, \vec{0}, \frac{Q}{2x}\right), \\ l &= (l_0, \vec{l}_T, l_3) = \xi p = x p = \left(\frac{Q}{2}, \vec{0}, \frac{Q}{2}\right), \\ l' &= (l'_0, \vec{l}'_T, l'_3) = l + q = \left(\frac{Q}{2}, \vec{0}, -\frac{Q}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

où l et l' sont les impulsions du parton avant et après collision.

Les hélicités λ et λ' du parton ont donc pour valeur avant et après la diffusion :

$$\lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|} = S_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad (4.83)$$

$$\lambda' = \frac{\vec{S}' \cdot \vec{l}'}{|\vec{l}'|} = -S'_3 = \mp \frac{1}{2}. \quad (4.84)$$

La conservation de l'hélicité par les interactions électromagnétiques implique alors que seuls des photons virtuels d'hélicité $\lambda = \pm 1$, c'est-à-dire transverses, peuvent être absorbés par le parton lors du processus de diffusion. Autrement dit la contribution de l'échange de photon longitudinaux ($\lambda = 0$) est nulle, ce qui se reflète par $F_L = 0$. Les quarks n'étant pas de masses nulles, ceci ne constitue qu'une approximation.

4.5.1 Lien entre quarks et partons

La valence et la mer

La spectroscopie des hadrons, qui a amené le modèle des quarks, définit les quarks composant le p et le n de façon à satisfaire les différents nombres quantiques :

$$\begin{aligned} p &= (uud) & F_2^{ep} &= \frac{1}{9}x [4u_p + d_p] \\ n &= (udd) & F_2^{en} &= \frac{1}{9}x [4u_n + d_n] \end{aligned} \quad (4.85)$$

La symétrie d'isospin fort $SU(2)$ donne :

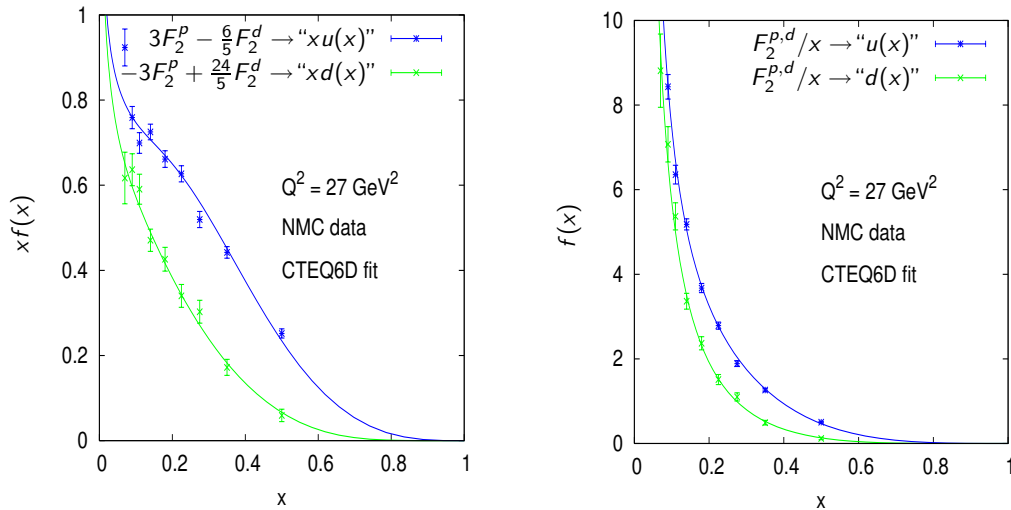
$$u(x) \equiv u_p(x) = d_n(x) \quad \text{et} \quad d(x) \equiv d_p(x) = u_n(x) \quad (4.86)$$

devant respecter les règles de somme :

$$\int_0^1 u(x) dx = 2, \quad \int_0^1 d(x) dx = 1 \quad (4.87)$$

Expérimentalement F_2^{en} est obtenu par interaction sur du deutéron $F_2^{ed} = \frac{1}{2}[F_2^{ep} + F_2^{en}]$. Des combinaisons linéaires de F_2^{ep} et F_2^{ed} permettent d'extraire :

$$xu(x) = 3F_2^{ep} - \frac{6}{5}F_2^{ed} \quad \text{et} \quad xd(x) = -3F_2^{ep} + \frac{24}{5}F_2^{ed} \quad (4.88)$$


 FIGURE 4.10 – Distribution $u(x)$ et $d(x)$ obtenue par l'expérience NMC [Nucl.Phys. B483 (1997) 3-43]

La figure 4.10 montre des résultats obtenus par l'expérience NMC pour ces distributions multipliées par x (à gauche) et non multipliées par x (à droite). La dépendance en x est du type $u(x) \sim d(x) \sim x^{-1.25}$. C'est-à-dire correspondant à des divergences si on les intègre, ce qui est en contradiction avec la règle de somme 4.87. Pour expliquer la présence d'un nombre infini de partons dans le proton, portant des fractions d'impulsion extrêmement petites il faut rajouter dans notre image de la fonction d'onde du proton une contribution qui provient de fluctuation en paires $q\bar{q}$: ce sont les *quarks de la mer*.

Les densités de quarks sont alors décomposées en leur composante de valence (dominante aux grandes valeurs de x) et une de mer (dominante aux petites valeurs de x - indice S pour sea en anglais) :

$$\begin{aligned} u(x) &= u_V(x) + u_S(x) \\ d(x) &= d_V(x) + d_S(x) , \end{aligned} \quad (4.89)$$

les règles de somme 4.87 s'appliquant uniquement aux quarks de valence.

Dans un premier temps on supposera que les contributions de la mer sont égales pour les différents saveurs :

$$S(x) = u_S(x) \simeq \bar{u}_S(x) \simeq d_S(x) \simeq \bar{d}_S(x) \simeq s_S(x) \simeq \bar{s}_S(x) , \quad (4.90)$$

En comparant à nouveau les fonctions de structure du p et du n :

$$\frac{1}{x}F_2^{ep} = \frac{1}{9} [4u_V + d_V] + \frac{4}{3}S \quad \frac{1}{x}F_2^{en} = \frac{1}{9} [u_V + 4d_V] + \frac{4}{3}S \quad (4.91)$$

où la contribution totale de la mer $\frac{4}{3}S = \frac{1}{9}[4\bar{u}_S(x) + 4u_S(x) + 1\bar{d}_S(x) + 1d_S(x) + 1\bar{s}_S(x) + 1s_S(x)]$. Si l'on suppose que $u_V(x) \gg d_V(x)$, on s'attend aux valeurs asymptotiques :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \rightarrow \frac{u_V + 4d_V}{4u_V + d_V} \simeq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \rightarrow 1 \quad (4.92)$$

ce qui est confirmé par les données (figure 4.11) : la valence domine aux grandes valeurs de x et la mer aux petites valeurs.

D'où viennent les quarks de la mer? Un résultat expérimental important nous dit que :

$$\sum_q \int_0^1 x [q(x) + \bar{q}(x)] dx = \int_0^1 x [u_V(x) + d_V(x) + 6S(x)] \simeq 0.5 \quad (4.93)$$

Ce qui montre que seule la moitié de l'impulsion du proton est portée par les quarks (valence + mer) et montre donc que parmi les partons il y a aussi des objets neutres électriquement : les gluons. On atteint ici la limite de ce modèle naïf. Les quarks étant liés par les gluons, ils ne sont donc pas libres dans le proton. On peut donc s'attendre à ce que les quarks aient un mouvement de Fermi, donc une impulsion transverse et donc que σ_L soit non nul.

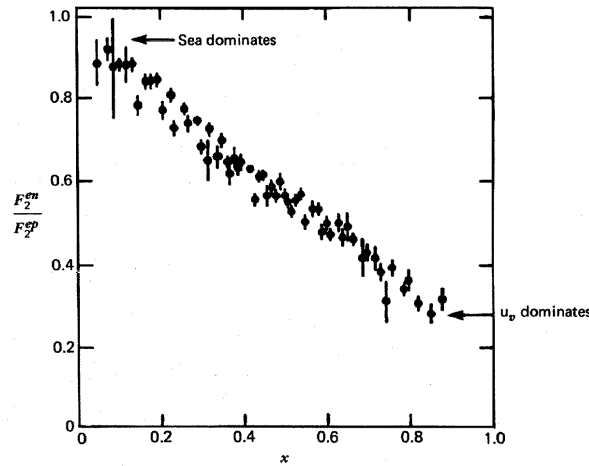


FIGURE 4.11 – Rapport des fonctions F_2 pour les diffusion sur n et sur p .

4.6 Mesure étendue des fonctions de structure

L'exploitation du seul collisionneur électron-proton de l'histoire, le Hadron-Electron Ring Accelerator (HERA), a permis des avancées importantes dans la compréhension de la structure du proton et l'étude des interactions fortes, en particulier par la mesure précise dans un large domaine cinématique des fonctions de structures. Situé à DESY (Hambourg) dans un tunnel de 6.3 km de circonférence, HERA fit entrer en collision frontale des électrons de 27.6 GeV et des protons de 920 GeV ($\sqrt{s} = 318$ GeV), entre 1992 et 2007. Pour la première fois des aimants supraconducteurs furent utilisés pour guider le faisceau de protons. Aux quatre points d'interactions, quatre expériences : deux généralistes H1 et ZEUS, une dédiée aux mesures polarisées, HERMES et une à la physique du quark b , HERA-B.

Pour accéder aux fonctions de structures, il faut mesurer la section efficace de façon doublement différentielle (voir équation 4.67). En mesurant pour chaque événement les valeurs de l'énergie de l'électron diffusé, E_e , et son angle polaire, θ_e , nous pouvons reconstruire les valeurs de x et Q^2 , par les relations³ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{E_e^0}{E_p^0} \frac{E_e (1 + \cos \theta_e)}{2 E_e - E_e^0 (1 - \cos \theta_e)} \\ Q^2 &= 2 E_e^0 E_e (1 + \cos \theta_e) \end{aligned} \quad (4.94)$$

3. notez que d'autres méthodes sont possible en utilisant la mesure de l'ensemble hadronique final

Un événement typique est présenté à la figure 4.12. Sur cette vue, le faisceau d'électrons provient de la gauche et le faisceau de proton de la droite. L'électron diffusé laisse une trace dans le trajectographe et un dépôt d'énergie dans le calorimètre électromagnétique (en vert). La mesure de son angle polaire et de l'énergie permettent de déterminer les valeurs de Q^2 et x comme repris sur la figure. Un jet est observé - traces et dépôts d'énergie dans les calorimètres électromagnétique et hadronique (en orange). On observe une compensation de l'impulsion transverse entre l'électron diffusé et le jet (encadré en haut à droite). On observe également une partie des débris du proton.

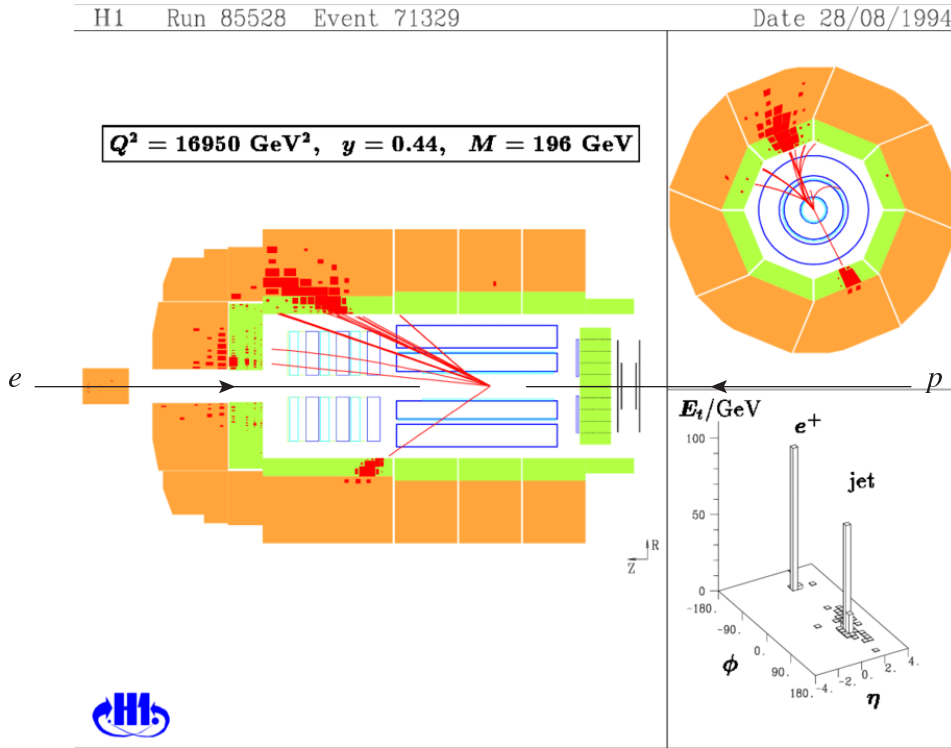


FIGURE 4.12 – Exemple d'événement de diffusion profondément inélastique mesuré par le détecteur H1. Les détails sont donnés dans le texte.

La correspondance entre ces variables est illustrée à la figure 4.13 de gauche, où les courbes à E_e et θ_e constants sont présentées dans le plan (x, Q^2) , pour la cinématique de HERA. A titre d'illustration, la zone en jaune correspond au domaine cinématique couvert par le calorimètre électromagnétique arrière du détecteur H1.

On choisit un pavage du plan (x, Q^2) (binning en anglais) et l'on compte le nombre d'événements dans chaque intervalle (bin) - voir figure 4.13 de droite. La section efficace dans un bin est calculée par :

$$\frac{d\sigma_{bin}}{dx dQ^2} = \frac{N_{bin} - N_{Bg}}{\mathcal{L} Acc \epsilon} \tag{4.95}$$

où N_{bin} est le nombre d'événements dans le bin, N_{Bg} le nombre d'événements de bruit de fond dans ce bin, \mathcal{L} la luminosité intégrée de l'échantillon, Acc l'acceptance (c'est à dire la fraction d'événements mesurables dans ce bin - ce terme corrige des pertes dues à la géométrie du détecteur) et ϵ l'efficacité (ce terme corrige des pertes dues aux imperfections du système d'acquisition et de la reconstruction cinématique). Ici le produit $dx dQ^2$ représente la taille du bin, idéalement il faudrait que cette taille tende vers zéro pour avoir

une véritable expression différentielle.

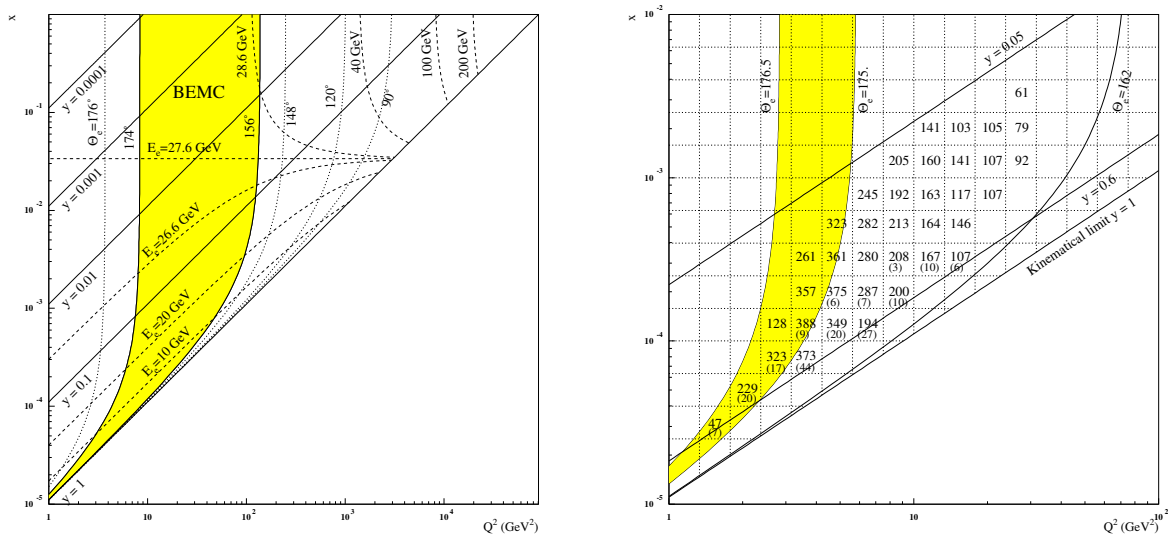


FIGURE 4.13 – Domaine cinématique. A gauche) lien entre les variables x , Q^2 et l'énergie et l'angle θ de l'électron diffusé. A droite) Exemple d'un échantillon expérimental présentant un nombre d'événements dans chaque bin ainsi que le nombre d'événements de bruit de fond (chiffre inférieur).

Le domaine cinématique couvert par les différentes expériences de HERA et en cible fixe est présenté à la figure 4.14.

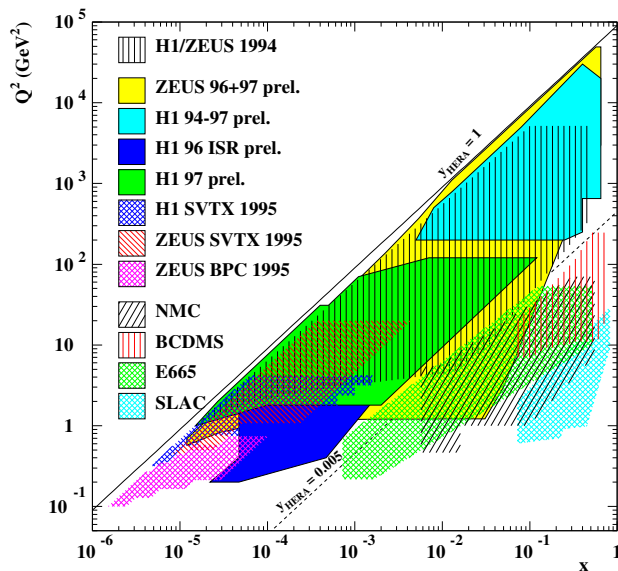


FIGURE 4.14 – Domaine cinématique accessible par différentes expériences d'interaction eN : SLAC, H1, ZEUS et μN : SLAC, BCDMS, NMC et E665, où $N = p, n, d$.

Par facilité, on définit la section efficace réduite :

$$\sigma_r(x, Q^2) = \frac{1}{Y_+} \frac{x Q^4}{2\pi\alpha^2} \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \tag{4.96}$$

où $Y_+ = 1 + (1 - y)^2$, qui se ramène à F_2 si le terme comprenant F_L est négligeable :

$$F_2(x, Q^2) = \sigma_r(x, Q^2) + \frac{y^2}{Y_+} F_L(x, Q^2). \quad (4.97)$$

La section efficace réduite $\sigma_r(x, Q^2)$ de la réaction $e^+ p \rightarrow e^+ X$ en fonction de la variable x de Björken pour différentes valeurs de la virtualité Q^2 obtenue par combinaison des mesures effectuées par chacune des collaborations H1 et ZEUS sur base des données $e^+ p$ enregistrées pendant la phase HERA I est présentée aux figures 4.15 et 4.16. Les courbes HERAPDF1.0 correspondent à un ajustement réalisé à l'ordre sous-dominant de la QCD perturbative sur les données combinées.

On observe que pour des valeurs de x aux alentours de 0.15, l'invariance d'échelle observée en cible fixe, se prolonge jusqu'aux valeurs maximales atteintes Q^2 (voir figure 4.16 pour par exemple $x = 0.18$). En revanche, l'invariance d'échelle est violée d'une part aux petites valeurs de x et d'autre part aux grandes valeurs de x . Ce qui est en contradiction avec le modèle naïf des partons.

Mesure de F_L

La section efficace faisant intervenir toujours au moins deux fonctions de structures (par exemple F_2 et F_L), il faut recourir à des mesures à différentes énergies \sqrt{s} pour mesurer les deux fonctions. En effet, avec seulement une mesure de section efficace, à une valeur de x et de Q^2 donnée, seule une variation de y peut départager les deux fonctions, et comme $Q^2 = sxy$, cela revient à changer s en prenant des données à des énergies de faisceaux différentes.

Les mesures de H1 prises avec différentes énergies du faisceau de proton (donc différentes valeurs de \sqrt{s}) sont présentées aux figures 4.17 et 4.18.

Mesure de F_3 - effet de l'échange de Z^0

Nous nous sommes jusqu'ici limités dans le calcul de la section efficace inclusive à l'échange d'un photon. Cela nous a permis de supprimer les termes violant la parité. Aux valeurs de Q^2 approchant la masse du Z , il faut rétablir ce terme car l'échange d'un Z et surtout l'interférence entre l'échange d'un photon et d'un Z apporte une contribution non négligeable à la section efficace. Cela entraîne l'introduction d'une fonction de structure supplémentaire, et la section efficace pour l'échange par courant neutre s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma(e^\pm p \rightarrow e^\pm X)}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} \left[xy^2 F_1^{NC}(x, Q^2) + (1-y) F_2^{NC}(x, Q^2) \mp y(1-y/2) F_3^{NC}(x, Q^2) \right]. \quad (4.98)$$

Les fonctions F_i contiennent des facteurs incluant les charges faibles vectorielles et axiales :

$$\begin{aligned} F_2^{NC}(x, Q^2) &= 2xF_1^{NC}(x, Q^2) = \sum_q x [q(x) + \bar{q}(x)] C_q(Q^2) \\ xF_3^{NC}(x, Q^2) &= \sum_q x [q(x) - \bar{q}(x)] D_q(Q^2) \end{aligned} \quad (4.99)$$

où

$$\begin{aligned} C_q(Q^2) &= e_q^2 - 2e_q v_e v_q P_Z + (v_e^2 + a_e^2) P_Z^2 \\ D_q(Q^2) &= -2e_q a_e a_q P_Z + 4v_e a_e v_q a_q P_Z^2 \\ P_Z &= \frac{Q^2}{Q^2 + M_Z^2} \frac{\sqrt{2} G_\mu M_Z^2}{4\pi\alpha} \end{aligned} \quad (4.100)$$

H1 and ZEUS

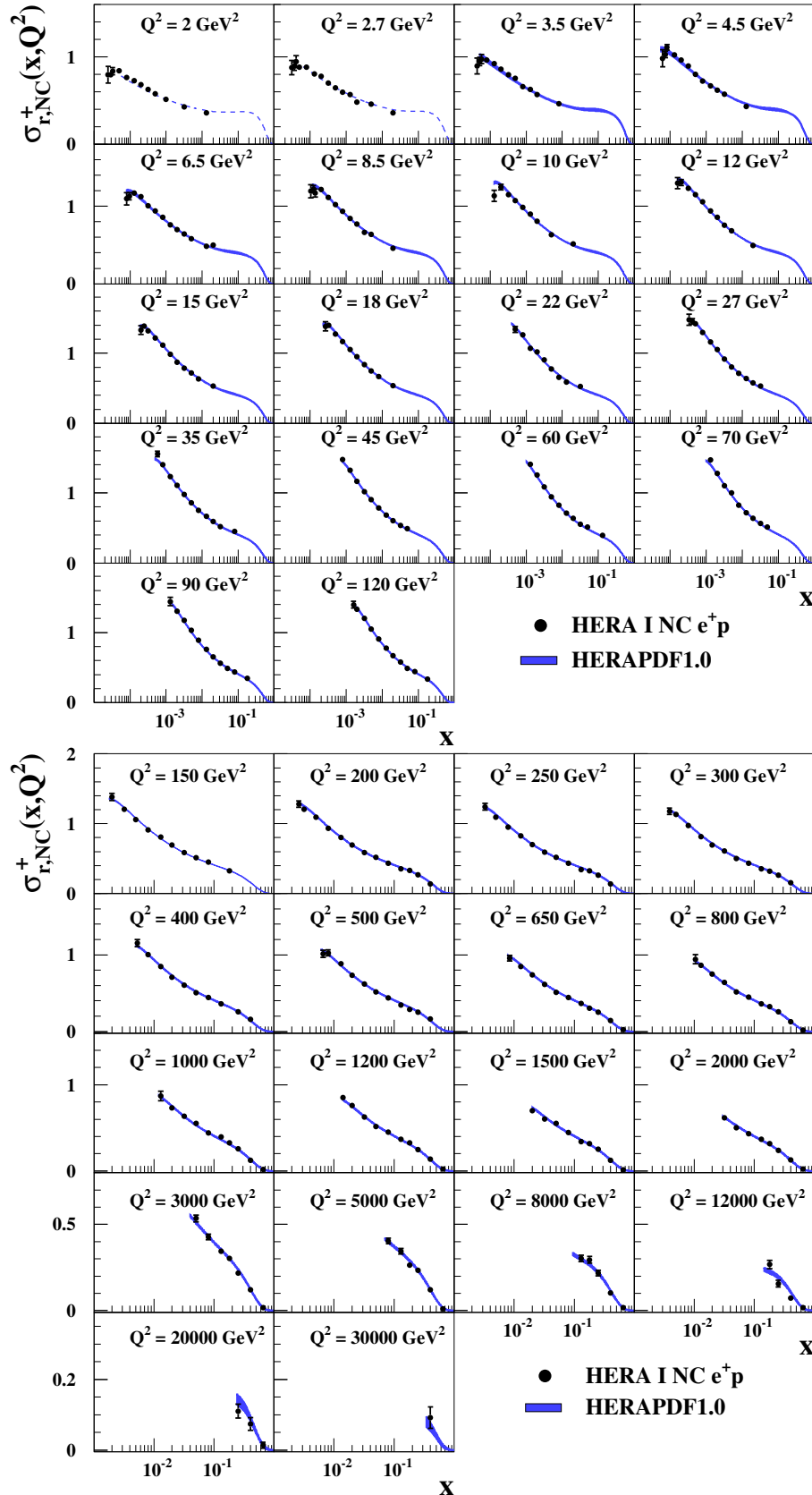


FIGURE 4.15 – Section efficace réduite $\sigma_r(x, Q^2)$ de la diffusion profondément inélastique à courant neutre $e^+ p \rightarrow e^+ X$ en fonction de la variable x de Björken pour différentes valeurs de la virtualité Q^2 comprises dans le domaine $1.5 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 30000 \text{ GeV}^2$, obtenue par combinaison des mesures effectuées par chacune des collaborations H1 et ZEUS sur base des données $e^+ p$ enregistrées pendant la phase HERA I. [H1 and ZEUS Coll., JHEP **1001** (2010) 109].

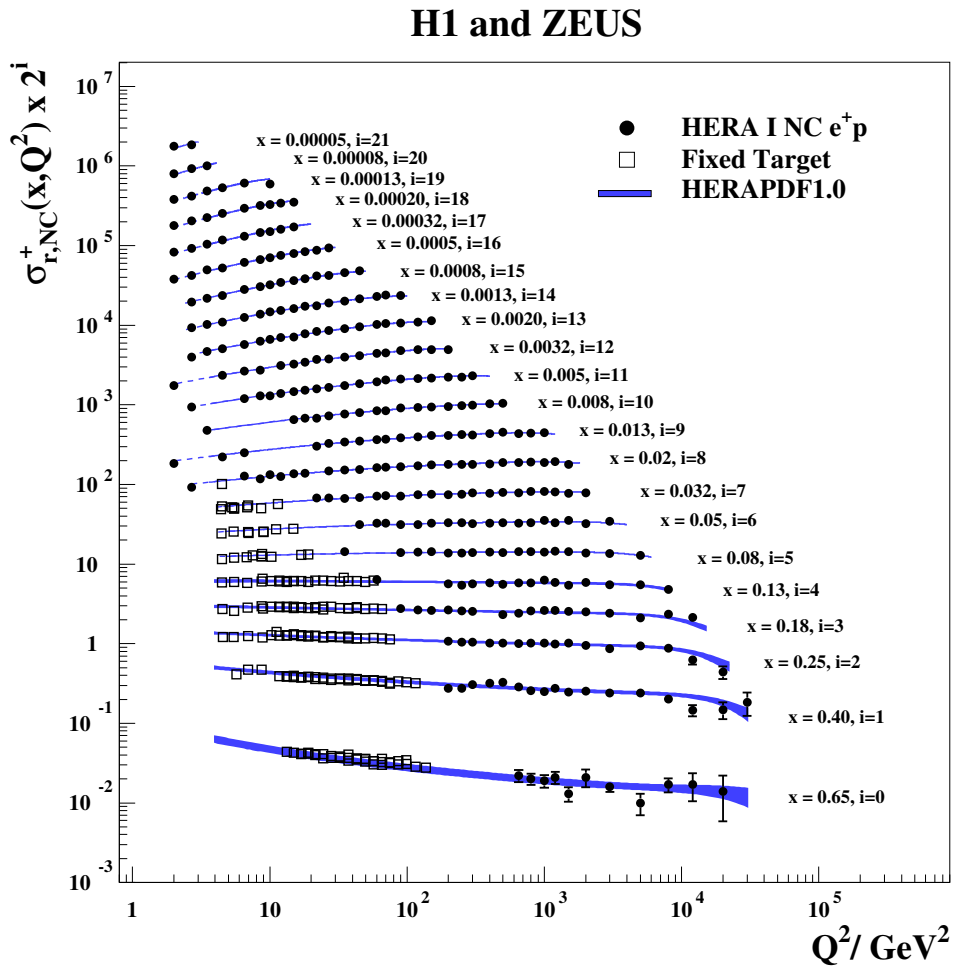


FIGURE 4.16 – Section efficace réduite $\sigma_r(x, Q^2)$ de la diffusion profondément inélastique à courant neutre $e^+ p \rightarrow e^+ X$ en fonction de la virtualité Q^2 pour différentes valeurs de la variable x de Björken, obtenue par combinaison des mesures effectuées par les collaborations H1 et ZEUS sur base des données $e^+ p$ enregistrées pendant la phase HERA I. Les courbes H1 2000 PDF correspondent à un ajustement réalisé à l'ordre sous-dominant de la QCD perturbative des données combinées. Les résultats des expériences sur cible fixe BCDMS et NMC sont également présentés sur la figure. [H1 and ZEUS Coll., JHEP **1001** (2010) 109].

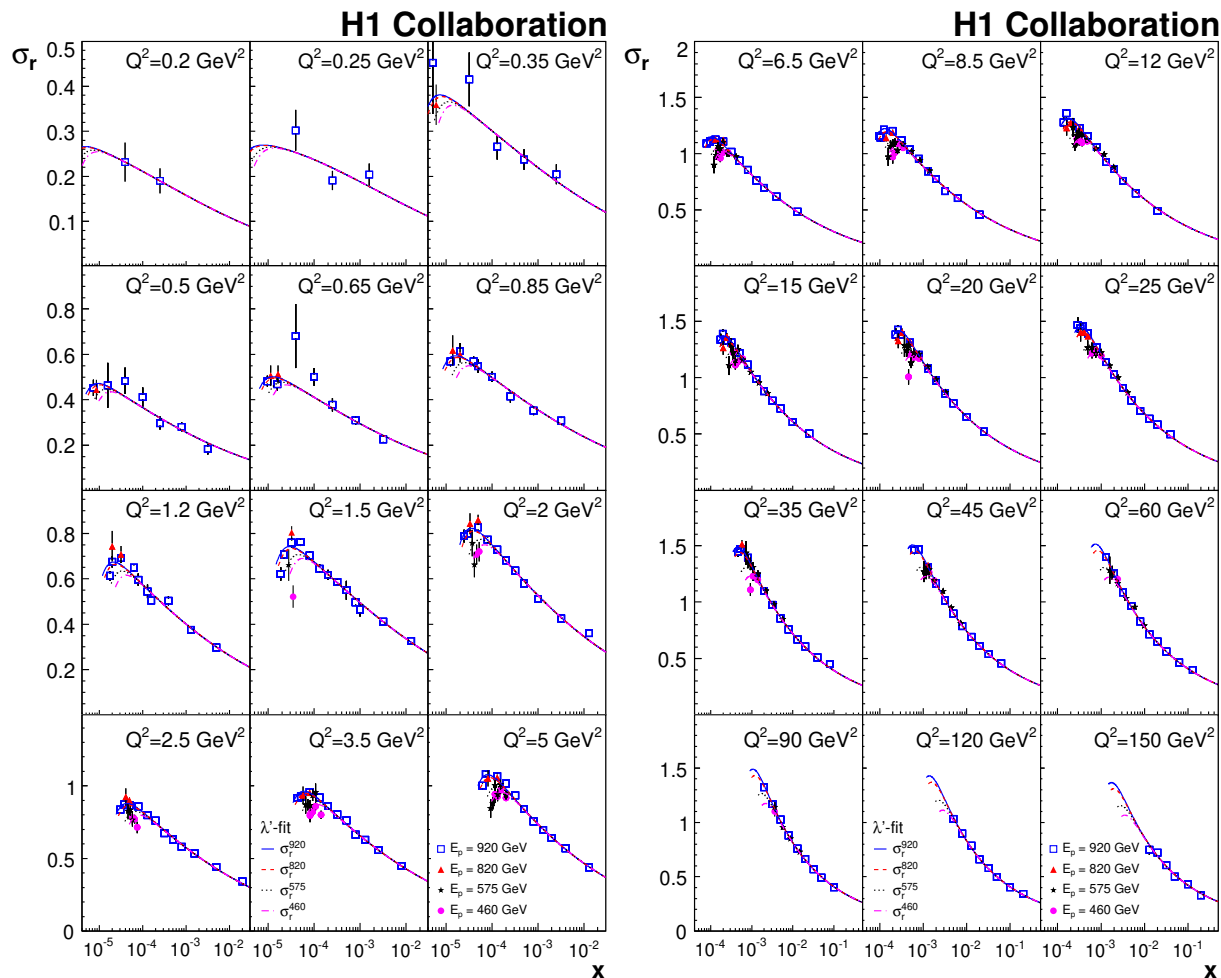


FIGURE 4.17 – Sections efficaces réduites mesurées par la Collaboration H1 à différentes énergies du faisceau de proton de HERA [H1 Coll, Eur. Phys. J. C 71 (2011) 1579].

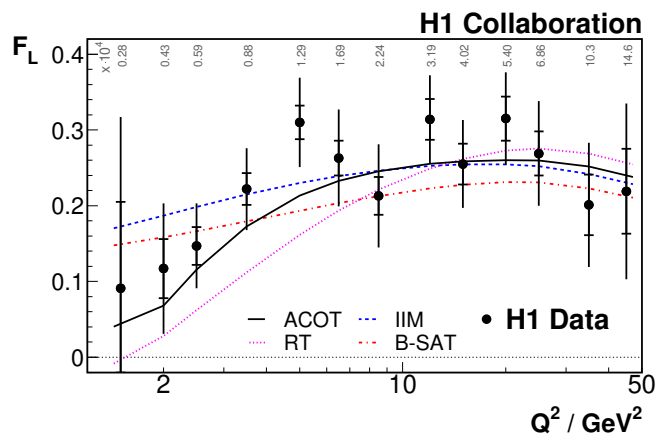


FIGURE 4.18 – Mesure de la fonction de structure F_L par la Collaboration H1 [H1 Coll, Eur. Phys. J. C 71 (2011) 1579].

Les données HERA I combinées de H1 et de ZEUS sont montrées séparément pour les réactions $e^+ p \rightarrow e^+ X$ et $e^- p \rightarrow e^- X$ en fonction de la virtualité Q^2 pour différentes valeurs de x à la figure 4.19. Comme attendu, on observe une différence aux grandes valeurs de Q^2 , là où l'échange du boson Z n'est plus négligeable, soit quand $Q^2 \gtrsim M_Z^2$. La comparaison des mesures en $e^+ p$ et $e^- p$ permet donc une extraction de la fonction de structure F_3 qui combinée à F_2 permet de différencier les densités de quark et d'antiquarks de même saveur.

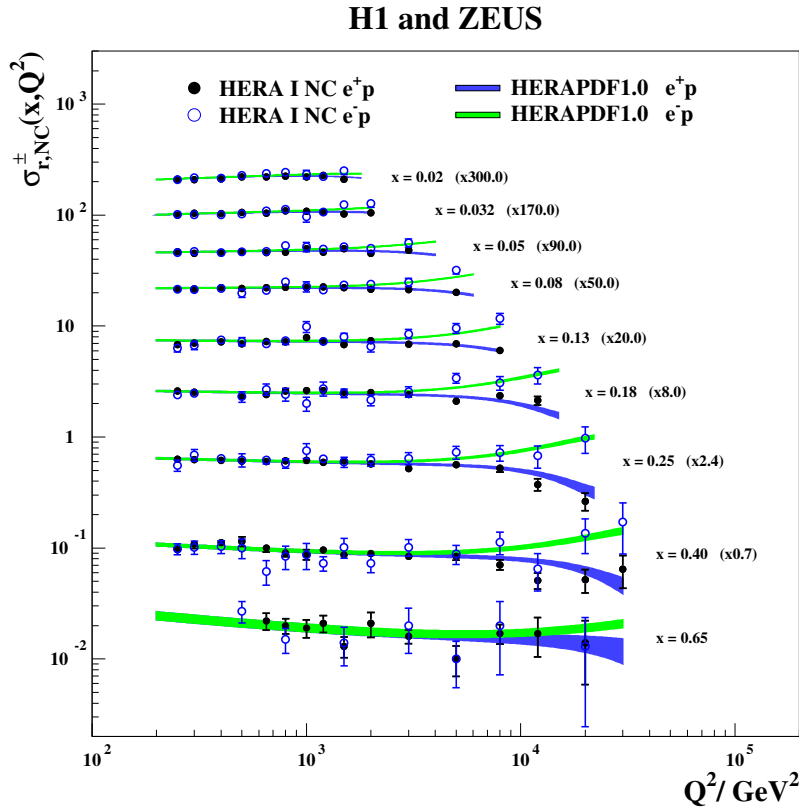


FIGURE 4.19 – Mesures des sections efficaces réduites, séparément pour les réactions $e^+ p \rightarrow e^+ X$ et $e^- p \rightarrow e^- X$ en fonction de la virtualité Q^2 pour différentes valeurs de x [H1 and ZEUS Coll., JHEP **1001** (2010) 109].

Limite sur la taille des quarks

Comme nous l'avons vu, les expériences de diffusion permettent de déterminer la taille de la cible (le projectile est supposé de taille négligeable face à celle de la cible). Les diffusions profondément inélastiques permettent donc de sonder la taille des quarks (ou plus exactement des partons). La figure 4.20 montre le rapport entre la mesure de la section efficace faites par la collaboration H1 et celle attendue par le modèle standard, c'est-à-dire pour des partons de taille nulle. Le bon accord montre que, pour le domaine mesuré, il n'est pas nécessaire d'introduire des facteurs de formes pour les partons. On peut donc établir une limite sur la taille des quarks (voir légende de la figure).

4.7 La violation d'échelle et les équations DGLAP

Dans QCD, les quarks sont liés entre eux par des gluons. On devrait donc s'attendre à voir apparaître la limite de la validité du modèle naïf des partons. Avant d'aborder ces effets de façon systématique à l'aide

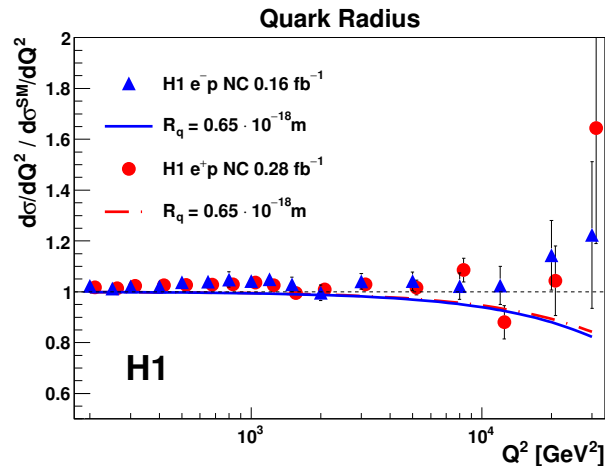


FIGURE 4.20 – Rapport entre la mesure de la section efficace faites par la collaboration H1 et celle attendue par le modèle standard, c’est-à-dire pour des partons de taille nulle. Le bon accord montre permet d’établir une limite sur la taille des quarks : $R_q < 0.65 \cdot 10^{-18} \text{m}$ (95% CL) à comparer avec la limite actuelle de la taille de l’électron $R_e < 0.28 \cdot 10^{-18} \text{m}$. [H1 Coll, Phys. Lett. B **705** (2011) 52].

de QCD, regardons le problème de façon intuitive.

Les quarks peuvent émettre des gluons qui eux-mêmes peuvent également émettre des gluons, être réabsorbés ou donner naissance à une paire quark-antiquark. Toutes ces émissions seront réabsorbées si aucune interaction ne prend lieu. Ces fluctuations peuvent exister durant n’importe quelle échelle d’espace-temps inférieure à la taille du proton (1fm) - voir figure 4.21 où l’axe horizontal représente le temps. Le photon virtuel de notre interaction profondément inélastique vient sonder le proton avec une certaine résolution dans la direction transverse. La bande colorée de la figure 4.21 représente cette résolution en temps. Toute fluctuation dont le temps de vie est inférieure à la largeur de la bande ne peut pas être vue par le photon. La figure de droite représente le proton à plus haute énergie qu’à gauche. Les partons des fluctuations subissent donc un boost qui dilate leur échelle de temps. Un nombre bien plus grand de fluctuations pourront donc être vues à plus grande énergie.

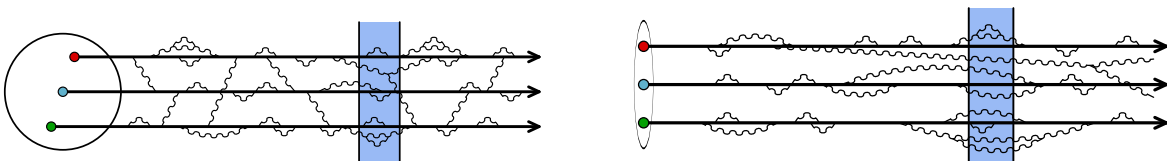


FIGURE 4.21 – Illustration de l’effet de l’énergie du proton pour un même Q^2 . Gauche : un proton à basse énergie. Droite : un proton à haute énergie.

Dans le modèle naïf, les partons ont une impulsion strictement parallèle à celle du proton. L’émission de gluons peut provoquer des impulsions transverses plus ou moins grandes. La probabilité pour un quark d’émettre un gluon dépend de α_s . Plus la valeur de Q^2 est grande plus l’espace des phases libre pour émettre un gluon est grand. Ce gluon emporte avec lui une partie de l’impulsion, laissant une impulsion (ou une fraction d’impulsion x) inférieure au quark dont il provient. On s’attend donc à ce que la densité de quarks de la mer augmente aux petites valeurs de x quand Q^2 augmente. En d’autres termes, l’augmentation de Q^2

ouvre un espace plus grand aux migrations des grands vers les petits x . Ceci est illustré à la figure 4.22. C'est ce qu'on appelle la violation de l'invariance d'échelle.

Le pic de la valence reste inchangé quelle que soit la valeur de Q^2 (c'est l'invariance d'échelle). L'augmentation de Q^2 entraîne une "migration" vers les petits x mais le nombre de partons n'est pas conservé. Il augmente par les processus $q \rightarrow gq$, $g \rightarrow q\bar{q}$ et $g \rightarrow gg$ au premier ordre.

Remarquons que l'on utilise une approche perturbative pour des interactions sur les quarks dont les distributions ont des origines non perturbatives.

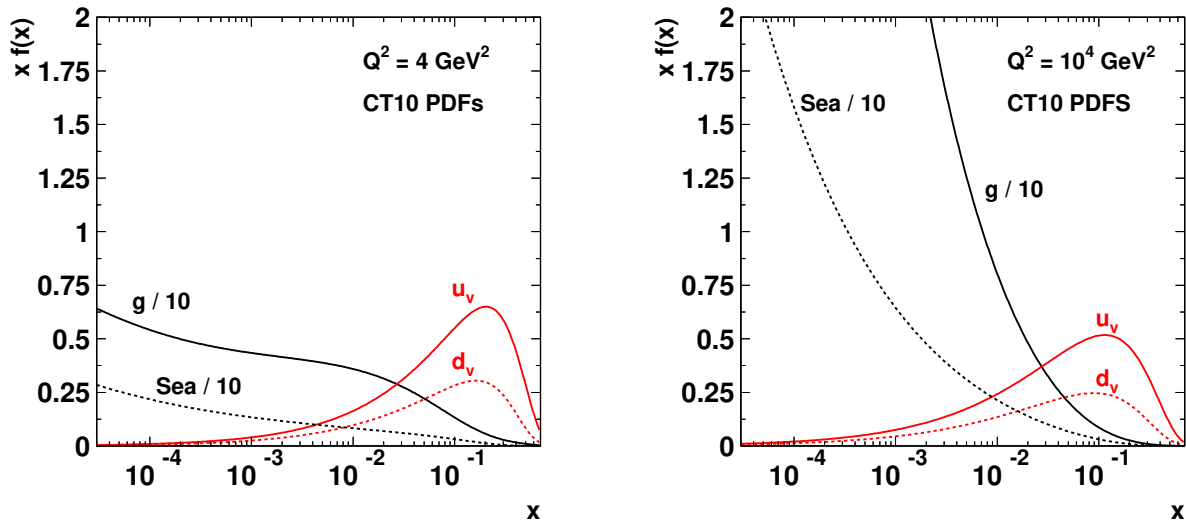


FIGURE 4.22 – Exemple de PDFs à $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ et $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$: la densité de gluons, des quarks de la mer et des quarks de valence $u_v = u - \bar{u}$ et $d_v = d - \bar{d}$.

4.7.1 Développement à l'ordre α_s

Les corrections au premier ordre en α_s à la diffusion $\gamma q \rightarrow q$ sont données à la figure 4.23. A nouveau, on peut montrer que les divergences infrarouges des émissions réelles sont compensées par les divergences ultraviolettes des corrections au vertex et aux propagateurs. Ceci de façon exacte à l'ordre par ordre. Mais cela n'est vrai que si l'on intègre sur l'espace des phases de l'état final, c'est-à-dire une intégration sur x . Or ce qui nous intéresse c'est précisément la dépendance en x de la section efficace. Une attention particulière devra donc être portée aux divergences induites par ces radiations. D'autre part, le calcul étant effectué jusqu'à un ordre limité, on continuera à considérer la dépendance en l'échelle de renormalisation de la constante de couplage $\alpha_s(\mu_R^2)$.

Emission d'un gluon

La contribution due aux deux diagrammes repris ci-dessous :



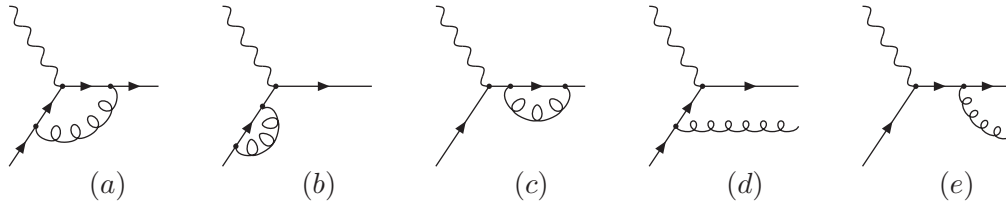


FIGURE 4.23 – Diagrammes relatifs à la diffusion $\gamma q \rightarrow q$ à l'ordre α_s : corrections au vertex (a) et au propagateur (b) et (c), émission d'un gluon réel (d) et (e).

s'exprime comme :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 32\pi^2(e_q^2\alpha\alpha_s)\frac{4}{3}\left[-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}}\right] \quad (4.101)$$

On y trouve le facteur de couleur, C_F , ici égal à $4/3$. Dans notre notation :

$$\begin{aligned} \hat{t} &= (k-p)^2 = (k'-q)^2 = -2pk(1-\cos\theta_{qg}) \\ \hat{s} &= (k+q)^2 = (k'+p)^2 = 2pk'(1-\cos\theta_{q'g}) \\ \hat{u} &= (q-p)^2 = (k-k')^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

On retrouve aussi les pôles attendus : du premier diagramme en $1/(k-p)^2 = 1/(k'-q)^2 = 1/\hat{t}$ de la propagation d'un quark et la voie t et du second dans la voie s . Le troisième terme provenant de l'interférence.

En ne conservant que la composante dominante à haute énergie, pour laquelle $-\hat{t} \ll \hat{s}$, on peut exprimer la section efficace de ce sous-processus différentielle en l'impulsion transverse du quark diffusé ($p_T = k' \sin\theta_{qg}$) :

$$\frac{d\hat{\sigma}(\gamma q \rightarrow qg)}{dp_T^2}(z) = \frac{4\pi^2\alpha e_q^2}{\hat{s}} \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \quad (4.103)$$

où la fonction $P_{qq}(z)$ est la fonction dite de splitting :

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} \quad (4.104)$$

qui dépend de la fraction d'impulsion longitudinale du quark incident :

$$z \equiv \frac{Q^2}{2k \cdot q} = \frac{Q^2}{Q^2 + \hat{s}} \quad (4.105)$$

La fonction de splitting $P_{qq}(z)$ représente la probabilité qu'un quark se retrouve avec une fraction z de son impulsion longitudinale après émission d'un gluon. La singularité en $z \rightarrow 1$ correspondant à une divergence infrarouge pour l'émission d'un gluon (de masse nulle) mou disparaît lors de la prise en compte des corrections virtuelles. La singularité colinéaire est également apparente dans la limite $p_T \rightarrow 0$ pour laquelle un cut-off sera introduit. La figure 4.24 met en évidence l'importance de cette émission de gluons.

En repartant de l'expression 4.77, mais écrite ici pour une seule saveur, on peut écrire à l'ordre le plus

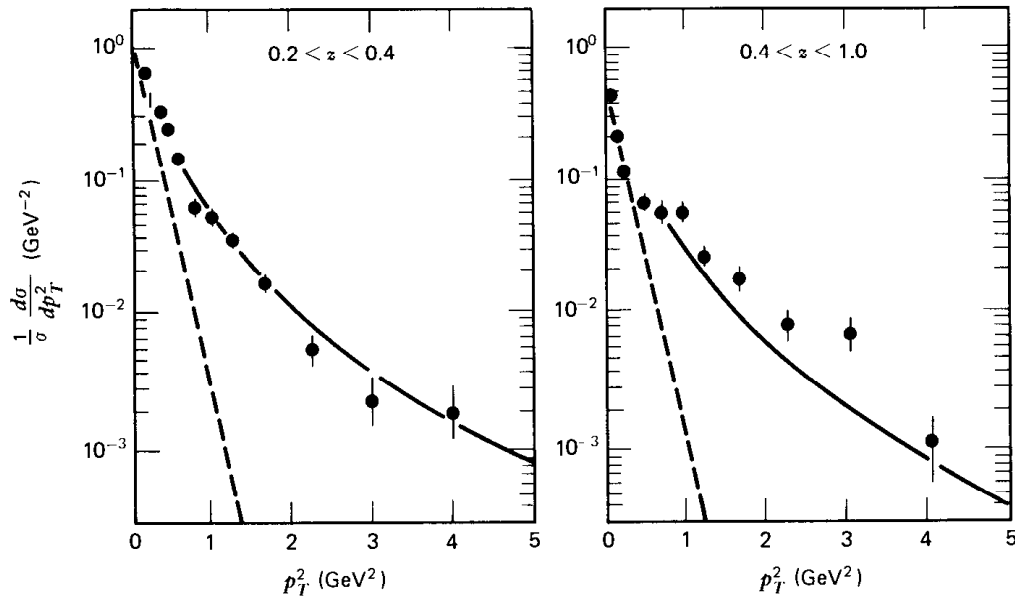


FIGURE 4.24 – Distributions en p_T des hadrons produites en interaction νN relativement à la direction du photon échangé mesurée par la Collaboration EMC du CERN [Phys. Lett. B95 (1980) 306]. La courbe aux traits interrompus correspond à la forme attendue en l'absence d'émission de gluon.

bas :

$$\begin{aligned}
 q(x) &= \int_0^1 d\xi q(\xi) \delta(x - \xi) \\
 &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) \\
 &= \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right)
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Cette dernière égalité provient du fait que cinématiquement $\xi \geq x$. En incluant la radiation d'un gluon dans l'état initial, on obtient :

$$\begin{aligned}
 q(x, Q^2) &= \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[q(\xi) \delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int dp_T^2 q(\xi) \frac{1}{p_T^2} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right] \\
 &= q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \int dp_T^2 q(\xi) \frac{1}{p_T^2} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right)
 \end{aligned} \tag{4.107}$$

La variable ξ représente (comme avant) la fraction d'impulsion du quark entrant, et x la fraction d'impulsion du quark au vertex avec le photon. On a de plus la relation $z = x/\xi$.

La dépendance en Q^2 vient de l'intégration sur l'impulsion transverse. La dépendance en p_T^2 présentant une divergence, on introduit le cut-off κ comme borne inférieure d'intégration. La borne supérieure correspond à la valeur maximale $s/4 = Q^2(1-z)/(4z)$. On obtient donc :

$$q(x, Q^2) = q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) + C(x). \tag{4.108}$$

où $C(x)$ est une fonction ne dépendant pas de Q^2 qui peut être absorbée dans $q(x)$.

L'invariance d'échelle obtenue dans le cadre du modèle naïf des partons est donc logarithmiquement brisée par la possibilité qu'a le quark participant à la diffusion au niveau partonique d'émettre un gluon pendant l'intervalle de temps caractérisant l'interaction dure. La description de la structure du proton en termes des fonctions de distribution partonique dépend par conséquent de la virtualité du photon qui sonde la matière, des valeurs croissantes de cette dernière permettant de résoudre d'autant mieux le vertex attaché à l'interaction dure (voir figure 4.25).

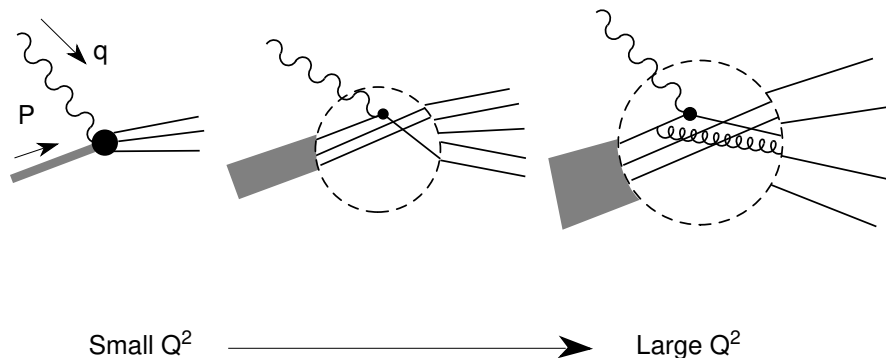


FIGURE 4.25 – Illustration de l'augmentation de résolution de la structure du proton avec Q^2 .

L'approximation de haute énergie que nous avons faite, $-t \ll s$, nous a mené à ne garder qu'un seul terme en p_T qui a mené à la dépendance simple en $\log(Q^2/\kappa^2)$. Ce n'est donc pas ici l'expression complète du LO, mais ce qu'on appelle l'approximation des logarithmes dominants (LL - Leading Log). Si l'on fait le calcul au delà des LL, on doit garder des termes supplémentaires qui ne pourront pas être facilement absorbés dans les distributions de partons.

La dépendance en le cut-off κ est gênante car arbitraire. On peut alors définir la densité de partons habillée $q(x, Q^2)$ à une certaine échelle de factorisation Q^2 à partir de la densité nue $q_b(x)$ et y absorber la dépendance en κ :

$$q(x, Q^2) = q_b(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q_b(\xi) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}\right) + O(\alpha_s^2) \quad (4.109)$$

$$= q(x, \mu^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, \mu^2) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + O(\alpha_s^2). \quad (4.110)$$

On remplace ainsi la densité de partons nue, divergente, par la densité de partons habillée, finie, en réabsorbant les émissions de gluons dont la virtualité est inférieure à une certaine échelle de factorisation μ^2 au sein de la dynamique interne du proton. Seuls les gluons dont la virtualité est supérieure à l'échelle de factorisation μ^2 contribuent aux éléments de matrice de la diffusion au niveau partonique en présence de l'échelle dure Q^2 .

La fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ s'écrit maintenant :

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[\delta\left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \right] q(\xi, \mu^2) \quad (4.111)$$

$$= x \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} C\left(\frac{x}{\xi}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) q(\xi, \mu^2), \quad (4.112)$$

où les fonctions $C(x/\xi, Q^2/\mu^2)$ sont appelées les coefficients de Wilson. L'attribution des contributions finies des diagrammes divergents aux coefficients de Wilson ou aux fonctions de distribution partonique définissant ce que l'on appelle le schéma de factorisation. Dans le schéma de soustraction minimale MS (Minimal Subtraction scheme), seules les contributions divergentes sont réabsorbées dans la définition des densités de partons, la réabsorption de certains termes constants au sein de ces dernières définissant le schéma de soustraction minimale modifié $\overline{\text{MS}}$ (Modified Minimal Subtraction scheme).

La densité de partons habillée $q(x, Q^2)$ est une observable physique, elle ne peut donc pas dépendre explicitement de l'échelle de factorisation μ^2 introduite. Repartant de 4.110 :

$$\begin{aligned} \frac{d q(x, Q^2)}{d \ln \mu^2} = 0 & \Rightarrow \frac{d q(x, \mu^2)}{d \ln \mu^2} = -\frac{d}{d \ln \mu^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, \mu^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \\ & \Rightarrow \frac{d q(x, \mu^2)}{d \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, \mu^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \end{aligned} \quad (4.113)$$

Ou en choisissant $\mu^2 = Q^2$:

$$\frac{d q(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \quad (4.114)$$

connue sous le nom d'équation de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi ou équation d'évolution DGLAP [18, 19, 20].

Théorème de factorisation

Pour pouvoir absorber le cut-off introduit nous devons faire appel au théorème de factorisation. Celui-ci stipule que dans le régime asymptotique de Björken la section efficace différentielle inclusive de la diffusion profondément inélastique $e p \rightarrow e X$ satisfait à tout ordre du développement perturbatif en la constante de couplage renormalisée $\alpha_s(\mu_R^2)$ la factorisation suivante [17] :

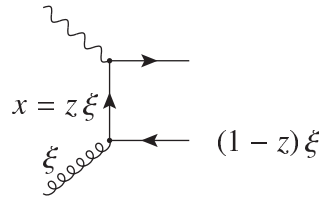
$$\frac{d^2 \sigma_{ep}}{dx dQ^2} = \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \sum_q f_q(\xi, \mu_F^2, \alpha_s(\mu_R^2)) \frac{d^2 \hat{\sigma}_q}{dx dQ^2} \left(\frac{x}{\xi}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\Lambda_{QCD}}{Q} \right), \quad (4.115)$$

valable à des corrections en puissance de Λ_{QCD}/Q près.

En d'autres termes, il démontre que la section efficace du processus DIS se factorise en une contribution uniquement contrôlée par la physique à courte portée ($\sim 1/Q$) correspondant à l'ensemble des processus de diffusion au niveau partonique qui peuvent donc être déterminés dans le cadre de pQCD, et en une contribution soumise à la physique à longue portée ($\sim Q/x$) qui ne peut dès lors être déterminée perturbativement et que l'on paramétrise au travers des fonctions de distribution partonique f_q .

Les autres termes

Une contribution cruciale à l'ordre α_s correspond au processus de fusion gluon-photon $g\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$:



permet de relier la densité de gluons $g(x, \mu^2)$ définie à une certaine échelle de factorisation μ^2 à la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ du proton :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x [q(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q(\xi, \mu^2) P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} g(\xi, \mu^2) P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)] \quad (4.116)$$

dans laquelle la fonction de splitting $P_{qg}(z)$:

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (4.117)$$

correspond à la probabilité qu'un gluon produise une paire quark-antiquark dont l'un des membres transporte une fraction z de l'impulsion longitudinale du gluon initial. Notons encore que dans la somme ci-dessus la fonction q représente les quarks et les antiquarks.

Notons pour être complet, bien qu'elles n'interviennent pas directement dans notre discussion, les deux dernières contributions à l'ordre α_s :



où le premier diagramme apporte la fonction de Splitting $P_{gq}(z)$ que l'on retrouve par simple substitution $z \rightarrow 1-z$ dans $P_{qg}(z)$ et le second la fonction $P_{gg}(z)$:

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1 + (1-z)^2}{z} \right], \quad (4.118)$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{z}{(1-z)} + (1-z)\left(z + \frac{1}{z}\right) \right] \quad (4.119)$$

Les densités de quarks et gluons sont donc liées et l'on peut écrire l'ensemble complet des équations DGLAP sous la forme (au premier ordre en α_s) :

$$\frac{d}{d \ln Q^2} \begin{pmatrix} q_i(x, Q^2) \\ \bar{q}_i(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \sum_{j=1}^{n_f} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \begin{pmatrix} P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) \delta_{ij} & 0 & P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ 0 & P_{q\bar{q}}\left(\frac{x}{\xi}\right) \delta_{ij} & P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \\ P_{gq}\left(\frac{x}{\xi}\right) & P_{gg}\left(\frac{x}{\xi}\right) & P_{gg}\left(\frac{x}{\xi}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j(\xi, Q^2) \\ \bar{q}_j(\xi, Q^2) \\ g(\xi, Q^2) \end{pmatrix}. \quad (4.120)$$

Les fonctions de Splitting ont été calculées aux ordre supérieurs :

$$P_{ab} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P^{(0)} + \frac{\alpha_s^2}{4\pi^2} P^{(1)} + \frac{\alpha_s^3}{4\pi^3} P^{(2)} + \dots \quad (4.121)$$

L'expression des fonctions de Splitting au NLO est donnée à la figure 4.26 [G. Curci, W. Furmanski, R. Petronzio : Nucl. Phys. B175, 27 (1980)]. Vingt ans plus tard, le long calcul a été obtenu au NNLO [S. I. Alekhin, Phys. Lett. B 519, 57 (2001)].

$$\begin{aligned} P_{ps}^{(1)}(x) &= 4 C_F \eta \left(\frac{20}{9} \frac{1}{x} - 2 + 6x - 4H_0 + x^2 \left[\frac{8}{3} H_0 - \frac{56}{9} \right] + (1+x) \left[5H_0 - 2H_{0,0} \right] \right) \\ P_{qg}^{(1)}(x) &= 4 C_A \eta \left(\frac{20}{9} \frac{1}{x} - 2 + 25x - 2p_{qg}(-x)H_{-1,0} - 2p_{qg}(x)H_{1,1} + x^2 \left[\frac{44}{3} H_0 - \frac{218}{9} \right] \right. \\ &\quad \left. + 4(1-x) \left[H_{0,0} - 2H_0 + xH_1 \right] - 4\zeta_2 x - 6H_{0,0} + 9H_0 \right) + 4 C_F \eta \left(2p_{qg}(x) \left[H_{1,0} + H_{1,1} + H_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \zeta_2 \right] + 4x^2 \left[H_0 + H_{0,0} + \frac{5}{2} \right] + 2(1-x) \left[H_0 + H_{0,0} - 2xH_1 + \frac{29}{4} \right] - \frac{15}{2} - H_{0,0} - \frac{1}{2} H_0 \right) \\ P_{gq}^{(1)}(x) &= 4 C_A C_F \left(\frac{1}{x} + 2p_{gq}(x) \left[H_{1,0} + H_{1,1} + H_2 - \frac{11}{6} H_1 \right] - x^2 \left[\frac{8}{3} H_0 - \frac{44}{9} \right] + 4\zeta_2 - 2 \right. \\ &\quad \left. - 7H_0 + 2H_{0,0} - 2H_1 x + (1+x) \left[2H_{0,0} - 5H_0 + \frac{37}{9} \right] - 2p_{gq}(-x)H_{-1,0} \right) - 4 C_F \eta \left(\frac{2}{3} x \right. \\ &\quad \left. - p_{gq}(x) \left[\frac{2}{3} H_1 - \frac{10}{9} \right] \right) + 4 C_F^2 \left(p_{gq}(x) \left[3H_1 - 2H_{1,1} \right] + (1+x) \left[H_{0,0} - \frac{7}{2} + \frac{7}{2} H_0 \right] - 3H_{0,0} \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{3}{2} H_0 + 2H_1 x \right) \\ P_{gg}^{(1)}(x) &= 4 C_A \eta \left(1 - x - \frac{10}{9} p_{gg}(x) - \frac{13}{9} \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) - \frac{2}{3} (1+x)H_0 - \frac{2}{3} \delta(1-x) \right) + 4 C_A^2 \left(27 \right. \\ &\quad \left. + (1+x) \left[\frac{11}{3} H_0 + 8H_{0,0} - \frac{27}{2} \right] + 2p_{gg}(-x) \left[H_{0,0} - 2H_{-1,0} - \zeta_2 \right] - \frac{67}{9} \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) - 12H_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{44}{3} x^2 H_0 + 2p_{gg}(x) \left[\frac{67}{18} - \zeta_2 + H_{0,0} + 2H_{1,0} + 2H_2 \right] + \delta(1-x) \left[\frac{8}{3} + 3\zeta_3 \right] \right) + 4 C_F \eta \left(2H_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{1}{x} + \frac{10}{3} x^2 - 12 + (1+x) \left[4 - 5H_0 - 2H_{0,0} \right] - \frac{1}{2} \delta(1-x) \right) . \end{aligned}$$

FIGURE 4.26 – Fonctions de Splitting au NLO.

La façon dont vont évoluer les densités de quarks et gluons est illustrée à la figure 4.27. L'évolution des densités de quarks (figure de gauche) entraîne une diminution de leur densité aux grandes valeurs de x et une augmentation des densités de quarks (liée au terme P_{qq}) et de gluons (terme P_{gq}) aux petites valeurs de x . L'évolution des densités de gluons (figure de droite) entraîne une diminution de leur densité aux grandes valeurs de x et également une augmentation des densités de quarks (terme P_{qg}) et de gluons (terme P_{gg}) aux petites valeurs de x .

4.7.2 Ajustement DGLAP aux données

Pour extraire les densités de partons, il faut les paramétrer à une valeur initiale de l'échelle $Q^2 = Q_0^2$ par exemple de la forme :

$$x f(x, Q_0^2) = A x^B (1-x)^C P(x) \quad (4.122)$$

les coefficients B et C gouvernent respectivement le comportement aux petites et aux grandes valeurs de x et le polynôme $P(x)$ détermine la modélisation des densités entre ces deux régions. Les densités de partons

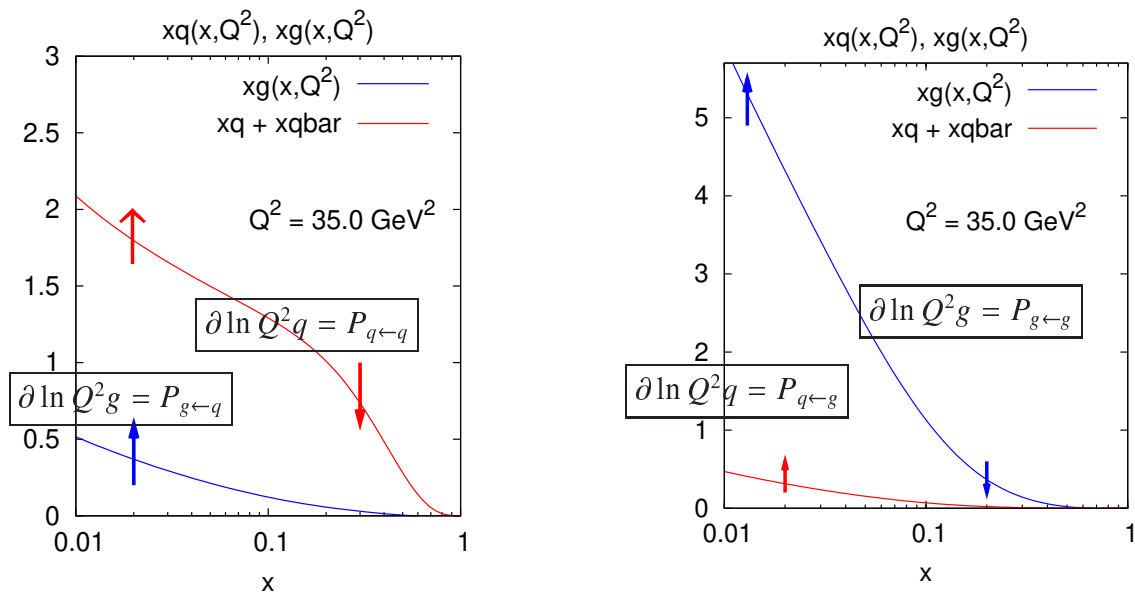


FIGURE 4.27 – Illustration de l'évolution DGLAP

sont ensuite déterminées aux valeurs $Q^2 > Q_0^2$ en recourant à l'équation d'évolution DGLAP.

La figure 4.28 illustre à titre d'exemple l'ajustement des densités de quarks et de gluons aux valeurs mesurées de la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$. En partant d'un ajustement des paramètres libres sur les mesures à $Q^2 = 12.0 \text{ GeV}^2$ (figure de gauche), les densités sont évoluées jusqu'à la valeur de $Q^2 = 46.0 \text{ GeV}^2$. Les figures de droite montrent le résultat si l'on n'inclut pas les gluons (densité mise à zéro) à la figure de droite du haut et si on inclut les gluons à la figure de droite du bas. Il apparaît clairement la nécessité d'inclure les densités de gluons dans l'évolution, ou en d'autres termes, cela montre la sensibilité des mesures aux densités de gluons, qui peuvent donc être extraites.

Le résultat de l'ajustement sur les données combinées de H1 et ZEUS est montré sur les figures 4.15 et 4.16. On notera la remarquablement bonne description de la violation d'invariance d'échelle sur 4 ordres de grandeur en Q^2 et 4 ordres de grandeur en x . Cette description nous fournit le test le plus contraignant et le plus probant de QCD à ce jour. Les distributions partoniques obtenues par cet ajustement sont montrées à la figure 4.29. C'est une paramétrisation alternative des PDFs à celle du groupe CT10 - voir figure 4.22. On y remarque l'importance de la densité de gluons. Les différences entre les paramétrisations obtenues, proviennent de :

- les données incluses dans l'ajustement
- la forme des paramétrisations à l'échelle Q_0^2
- différentes hypothèses (symétrie de la mer,...)

Pour contraindre les densités de quarks, en plus des données de diffusion de lepton (e, μ, ν) d'autres données peuvent être utilisées :

- Drell-Yan : $pN \rightarrow \mu^+\mu^-X$, dont le processus dominant est $q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$ (en particulier les données des expériences E605 et E772),
- le rapport des réactions $pn \rightarrow \mu^+\mu^-X$ et $pp \rightarrow \mu^+\mu^-X$ qui contraint le rapport \bar{d}/\bar{u} (expériences NA51 et E866),
- la production de W^\pm : $p\bar{p} \rightarrow W^\pm X$ dominée par $u\bar{d} \rightarrow W^+$ et $d\bar{u} \rightarrow W^-$. L'asymétrie W^\pm permet aussi de contraindre le rapport d/u .

La densité de gluons peut aussi être contrainte par :

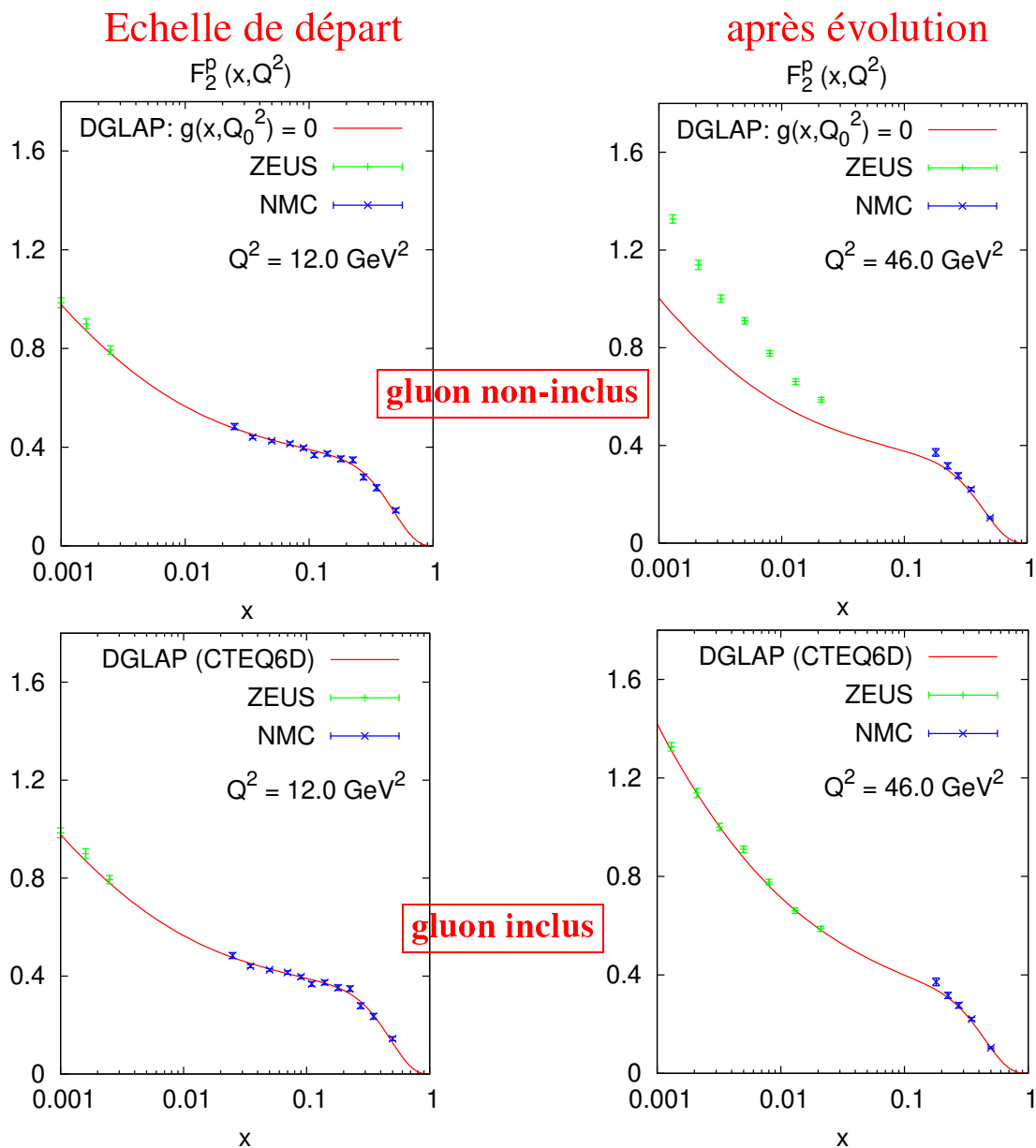


FIGURE 4.28 – Ajustement des données de F_2 suivant une évolution DGLAP sans et avec gluon.

- les mesures “prompt photon” : $pN \rightarrow \gamma X$ dans le domaines des grands x ($0.02 < x < 0.5$) - mesure plus “propre” que les jets, pas de correction hadronique et mesure précise de l’énergie. Expériences WA70, UA6, E706, ISR, UA2, CDF.
- Jets à grande impulsion transverse. HERA, TeVatron.

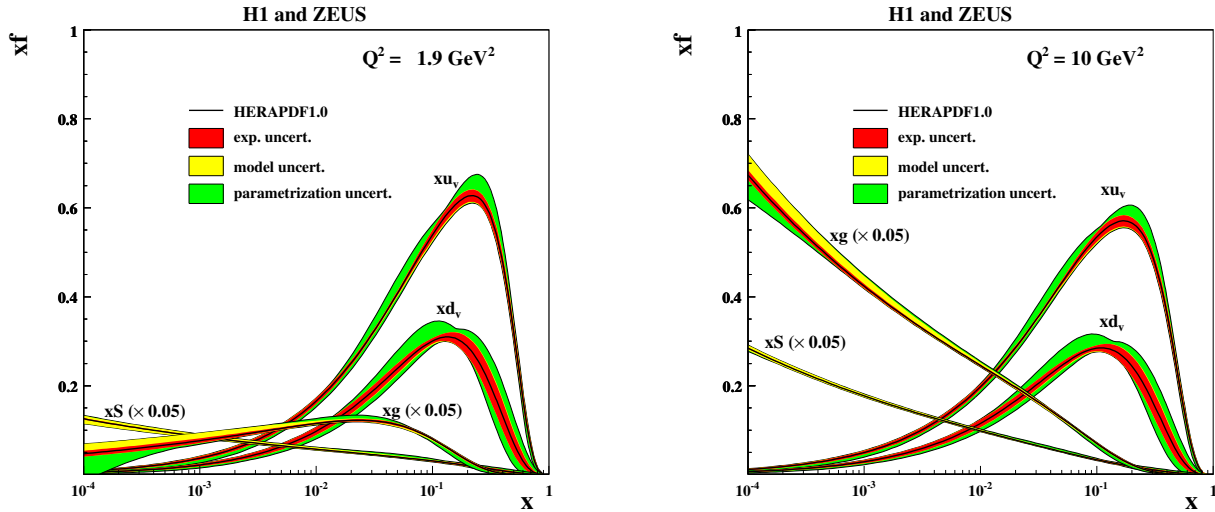


FIGURE 4.29 – Distributions de partons obtenues par un ajustement sur les données combinées de H1 et ZEUS [H1 and ZEUS Coll., JHEP **1001** (2010) 109].

4.7.3 Saturation

L’augmentation de la densité de gluons pour les x décroissant observée ne peut se prolonger jusqu’à $x = 0$ car cela violerait l’unitarité de la matrice de transition S . On s’attend à ce qu’aux valeurs de x suffisamment petites, la densité de gluons soit telle que la probabilité de recombinaison devienne importante et mène progressivement à un phénomène de saturation.

De façon semi quantitative, la saturation est attendue quand la section efficace de recombinaison fois la densité de gluons devient comparable à la taille transverse du proton, soit :

$$\sigma_{gg} N_g \simeq R_{\perp} \quad (4.123)$$

où :

$$\sigma_{gg} \sim \alpha_s / Q^2 \quad \text{et} \quad N_g \sim xg(x, Q^2) \quad (4.124)$$

Le domaine de saturation serait donc tel que :

$$Q^2 \leq Q_s^2 \quad , \quad \text{avec} \quad Q_s^2 \sim \alpha_s \frac{xg(x, Q_s^2)}{R_{\perp}} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda} \quad (4.125)$$

où Q_s représente l’échelle de saturation. Le domaine où la saturation est attendue est illustré à la figure 4.30.

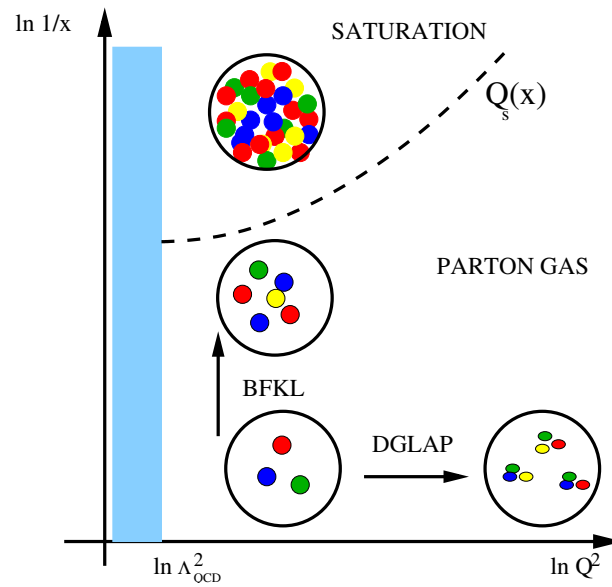


FIGURE 4.30 – Domaine de la saturation.

Actuellement la question de l'observation ou non de la saturation dans les données de HERA n'est pas tranchée. La difficulté vient du fait que lorsque x diminue, la valeur de Q^2 diminue aussi. Il est donc très difficile de savoir si les déviations observées par rapport aux prédictions QCD proviennent d'un phénomène de saturation ou de limite de validité du domaine perturbatif. Seules des données à plus grande énergie (petit x et Q^2 dans le domaine perturbatif) devraient permettre de répondre à cette question.

Chapitre 5

Les interactions proton-proton

Les collisions hadron-hadron sont dominées par des interactions softs (petites valeurs de P_T , petites masses,...). Comme en DIS, occasionnellement une interaction dure (grand P_T , grande masse,...) prend place. Ce type d'interaction est loin d'être compris dans tous ses aspects. Les aspects étudiés dépendent des conditions expérimentales dont principalement l'énergie disponible dans le centre de masse de l'interaction. Aux basses et moyennes énergies (en dessous de 100 GeV), actuellement, ce sont principalement les effets liés au spin qui sont étudiés ainsi que les effets non perturbatifs. Dans ce qui suit nous nous limiterons à une approche de la QCD perturbative dans le domaine des interactions à haute énergie (plus de quelques centaines de GeV - TeVatron et LHC).

A haute énergie, l'étude des interactions fortes est particulièrement importante pour comprendre en détails comment passer de la section efficace hadron-hadron à celle de parton-parton qui produiront un Higgs ou peut-être une nouvelle résonance à découvrir. D'autre part la production de jets est abondante à haute énergie, leur prédiction sort d'une approche perturbative classique, car la production de par exemple 5 jets nécessiterait un calcul au NNNLO! Enfin les processus QCD sont par plusieurs ordres de grandeur supérieurs aux autres processus étudiés comme le boson de Higgs et la recherche de nouvelles particules (supersymétrie, etc). Les interactions fortes doivent donc impérativement être comprises à un très haut niveau de précision. Par ailleurs, les plus hautes énergies jamais atteintes offrent la possibilité d'étudier des phénomènes nouveaux, liés à la production d'un grand nombre de jets, à la saturation des densités de partons ($s \sim 1/x$), aux dynamiques d'évolution à très haute énergie (modification attendue de DGLAP aux petites valeurs de x), aux échanges multiples de partons, ou encore par exemple à l'activité hadronique produite entre des jets de grande impulsion transverse,...

En présence d'une échelle dure, la section efficace hadron-hadron se factorise comme la convolution de deux distributions de partons avec la fonction de diffusion dure, $\hat{\sigma}$, calculable perturbativement :

$$\sigma_{hh' \rightarrow X(Q)}(Q) = \sum_{a,b=q,\bar{q},g} \int_0^1 dx_1 dx_2 f_{a/h}(x_1, \mu_F) f_{b/h'}(x_2, \mu_F) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X(Q)}(x_1, x_2, Q, \mu_F, \alpha_s(\mu_R)) \times \theta(x_1 x_2 s - Q^2), \quad (5.1)$$

où la fonction thêta met en évidence le fait que le système partonique doit avoir une énergie suffisante pour produire le système X de masse Q . Ici aussi, comme en DIS, la fonction décrivant le processus dur $\hat{\sigma}$ peut être développée perturbativement et dépend des échelles de factorisation, μ_F , et de renormalisation, μ_R . La dépendance en l'échelle de renormalisation, μ_R , provient du fait que le terme relatif au processus dur $\hat{\sigma}$ est limité à un certain ordre du développement en α_s . L'échelle de factorisation donne la valeur jusqu'à laquelle

les densités partoniques ont été évoluées, suivant les équations DGLAP (à partir de l'échelle, Q_0 utilisée pour extraire leur paramétrisation). En général, on les choisit égales l'une à l'autre et égales à l'échelle dure de l'interaction qui nous intéresse : $\mu = \mu_R = \mu_F = Q$.

Le processus dur $\hat{\sigma}$ se calcule suivant la série perturbative en α_S jusqu'à un ordre donné :

$$\hat{\sigma} = c^{(0)}\alpha_S(1 + \sum_{j=1}^n c^{(j)}\alpha_S^j) \tag{5.2}$$

où les coefficients c^j sont des fonctions calculables des variables cinématiques.

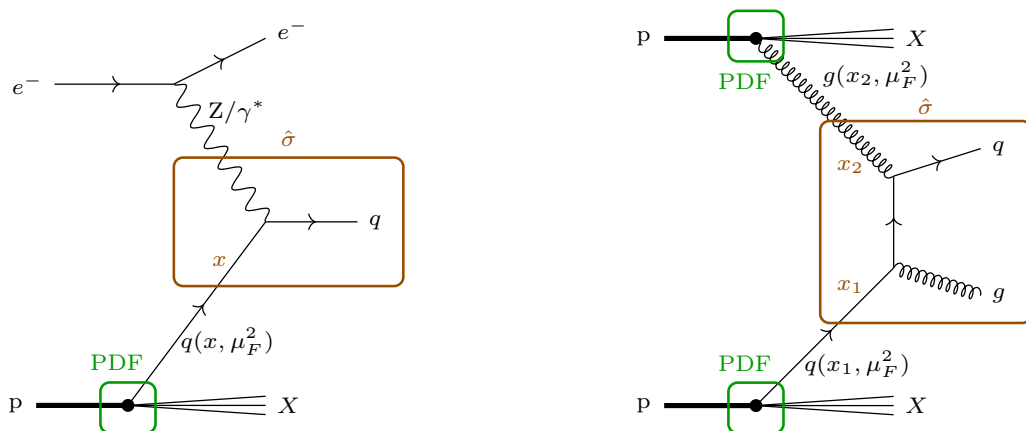


FIGURE 5.1 – Comparaison de la production de jets en DIS (ep) et hadron-hadron (pp) au LO.

En pratique le calcul de la section efficace devient vite très complexe. Actuellement seuls quelques processus sont connus au-delà du NLO.

Activité sous-jacente

A grande énergie (TeVatron, LHC), si l'on reprend notre image des fluctuations de partons au sein du proton l'effet du boost dû à la plus grande énergie des faisceaux sera encore augmenté par rapport aux conditions expérimentales de HERA, les densités partoniques sont donc d'autant plus grandes. L'activité hadronique dans le détecteur se complique, on distingue alors deux sous-ensembles dans l'événement :

- ↗ partie dure (ou hard)
- ↘ Underlying event
- (+pile-up)
- ↗ interactions multiples de partons
- ↘ rémanents des faisceaux

Partie hard. Elle correspond à l'activité relative à la composante dure et ne contient que les jets de grande impulsion transverse et autres objets portant une échelle dure (les bosons Z et W , les particules de grande impulsion transverse par exemple le photon, les particules portant des quarks lourds,...).

Underlying Event. Elle contient le reste de l'activité hadronique. Ce reste peut provenir des restes des faisceaux (particules rémanentes) de production de hadrons de faible impulsion transverse ou de diffusion

supplémentaires des partons avec le rémanent de l'autre faisceau.

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la densité de partons augmente vite quand la valeur du x de Bjorken diminue. Les hautes énergies ouvrent l'espace des phases aux petites valeurs de x qui vont contribuer de façon significative à la section efficace. Il faut donc s'attendre à ce que la probabilité d'avoir un processus avec deux partons issus du même proton soit non négligeable. On parle alors d'interaction multiple (MPI = multiple parton interaction). Ce genre d'interaction est observé depuis longtemps dans les interactions pp pour lesquelles au moins une des deux interactions est soft. Actuellement, au LHC, les processus pour lesquels deux interactions sont dures commencent à être étudiées, posant un grand nombre de questions théoriques et expérimentales. En particulier le fait que si deux partons sont émis par un proton, les équations d'évolutions DGLAP établies au chapitre 4 ne sont, a priori, plus valables. L'approche des PDF, qui décrivent la probabilité de présence d'un parton, sont à généraliser pour un plus grand nombre de partons tout en considérant leurs possibles corrélations en impulsion. Ces processus sont de plus intrinsèquement liés aux distributions spatiales des partons (dans le plan transverse) du proton qui sont encore très mal connues (les quarks de valence sont-ils au centre du proton et les gluons plus en périphéries?).

A tout cela il faut ajouter la possibilité, à haute luminosité, d'une superposition de plusieurs événements ("pile-up") lors du même croisement de faisceaux. Ces superpositions ne posent pas de problème théorique nouveau mais une difficulté expérimentale supplémentaire. En 2012 au LHC, il n'était pas rare d'observer 30 interactions se superposer durant le même croisement des faisceaux.

La figure 5.2 de droite illustre l'étendue du domaine cinématique couvert par le LHC (à 14 TeV) par rapport à HERA et aux expériences à cible fixe. On y voit la corrélation entre l'échelle à laquelle se passe l'interaction, M ou Q^2 , la rapidité du système partonique produit, y (la rapidité est définie et discutée dans la footnote de la page suivante), et la valeur d'un des deux x . En particulier, on voit que pour atteindre des petites valeurs de x il faut que le système partonique soit produit très à l'avant (ou à l'arrière), ce qui correspond à par exemple x_1 très petit et x_2 relativement grand (ou le contraire). Si les deux x sont comparables le système partonique sera produit à une rapidité proche de zéro et plus la valeur de ces x sera grande plus l'échelle M sera élevée.

Différentes sections efficaces sont montrées à la figure 5.2 de gauche en fonction de l'énergie dans le centre de masse pour des collisions $p\bar{p}$ (jusqu'à $\sqrt{s} = 4$ TeV) et pp (au-delà de 4 TeV). On remarque que la section efficace de production de jets de $p_T > 100$ GeV croît avec \sqrt{s} , comme on s'y attend, car il y a plus d'énergie disponible, en revanche elle décroît pour $p_T > \sqrt{s}/20$ car la constante de couplage $\alpha_S(s)$ tend vers zéro (liberté asymptotique) pour $s \rightarrow \infty$.

5.1 Production de jets

La production de jets en collisions hadron-hadron ($p\bar{p}$ au Tevatron $\sqrt{s} = 1.96$ TeV ou pp au LHC, $\sqrt{s} = 7, 8, 13$ et 13.6 TeV) est le processus dur offrant le plus haut taux d'événements et fournit un excellent test de QCD. Il permet de mesurer α_S , de tester la factorisation et de mieux contraindre les PDF et de sonder la physique à des échelles en énergie jamais atteintes en laboratoire. Ce saut en énergie par rapport au LEP ou à HERA se reflète dans les hautes valeurs atteintes pour l'impulsion transverse des jets (ils atteignent facilement plusieurs centaines de GeV).

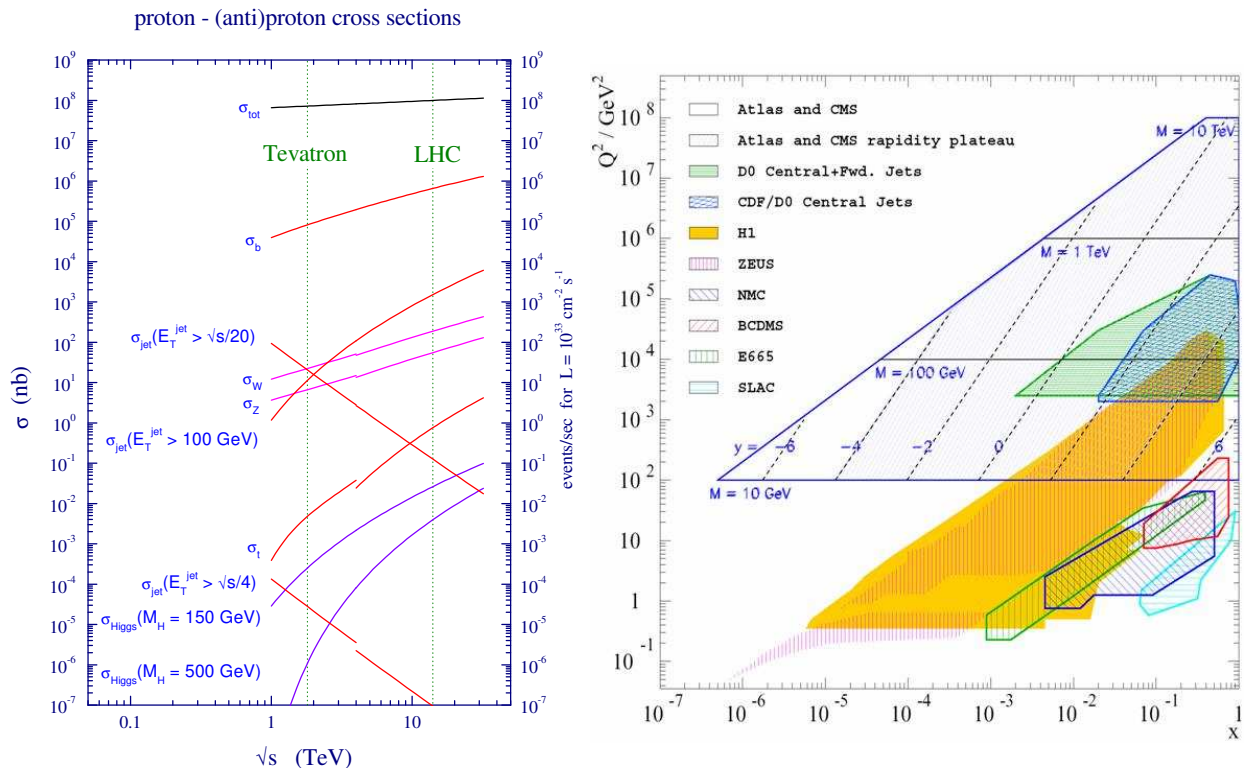


FIGURE 5.2 – A gauche : Différentes sections efficaces sont présentées en fonction de l'énergie disponible dans le centre de masse. Les sections efficaces sont de $p - \bar{p}$ pour la première partie de la courbe et $p - p$ pour la seconde, ce qui explique la brisure en son milieu. A droite : domaines cinématiques couverts par les expériences à cibles fixes, HERA et le LHC.

La section efficace de production de 2 jets est obtenue par la formule :

$$d\sigma = \sum_{a,b,c,d=q,\bar{q},g} dx_1 dx_2 f_{a/h}(x_1, \mu_F) f_{b/h'}(x_2, \mu_F) \frac{\hat{\sigma}_{a+b \rightarrow c+d}}{d\Phi} d\Phi \quad (5.3)$$

Les variables x_1 et x_2 n'étant pas directement observables on utilise les variables suivantes :

$$\tau = \frac{\hat{s}}{s} = x_1 x_2 \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \quad (5.4)$$

La variable τ représente le rapport entre les carrés des énergies des centres de masse partonique et hadronique. La variable y est importante, elle est appelée la *rapidité*¹ du centre de masse partonique (diffusé à un angle θ) par rapport au laboratoire (centre de masse hadronique). Remarquons de plus que $dx_1 dx_2 = dy d\tau$.

1. Plaçons nous dans le système invariant des deux jets dans lequel $p^\mu = p_{jet1}^\mu + p_{jet2}^\mu$. La rapidité de ce système est définie par :

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} \quad (5.5)$$

D'où cela vient-il? Son énergie, son impulsion suivant l'axe des faisceaux et sa masse invariante valent :

$$E = (x_1 + x_2) \sqrt{s}/2 \quad p_z = (x_1 - x_2) \sqrt{s}/2 \quad M^2 = x_1 x_2 s \quad (5.6)$$

On définit la rapidité de façon à obtenir le rapport x_1/x_2 :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{E + p_z}{E - p_z} = e^{2y} \quad (5.7)$$

La rapidité du système constitué des deux partons produits, d'impulsion p_c et p_d , est donnée par :

$$y = \frac{y_c + y_d}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \quad (5.9)$$

Le carré de l'énergie disponible dans le centre de masse des partons de l'interaction dur est donné par :

$$\hat{s} = s x_1 x_2 = 4p_T^2 \cosh^2 y ,$$

où p_T est l'impulsion transverse des partons sortants (n'ayant que deux partons sortants ils sont d'impulsions transverses égales et de p_x et p_y de signes opposés).

On écrit souvent la section efficace sous la forme :

$$\frac{d^3\sigma}{dy_c dy_d dp_T^2} = \frac{1}{16\pi s^2 x_1 x_2} \sum_{a,b,c,d=q,\bar{q},g} f_{a|h}(x_1, \mu_F) f_{b|h'}(x_2, \mu_F) \overline{|\mathcal{M}(ab \rightarrow cd)|^2} \frac{1}{1 + \delta_{cd}} \quad (5.10)$$

où les éléments de matrice sont moyennés sur les états de spin et sommés sur les états de couleur. Le delta de Kronecker introduit le facteur statistique nécessaire pour les états identiques de partons de l'état final.

Tous les processus partoniques qui contribuent à l'ordre le plus bas sont représentés à la figure 5.3 où les expressions des sections efficaces sont également données. Pour aller plus loin le lecteur consultera par exemple la référence [25].

La contribution relative des différents groupes de processus qui contribuent à la section efficace est illustrée à la figure 5.4 en fonction de l'impulsion transverse des jets (à cet ordre ils se compensent l'un l'autre dans le plan transverse). La domination des processus qq aux grandes valeurs de p_T provient principalement de la contribution des quarks de valence (i.e. aux grandes valeurs de x). Le pic relatif des contribution du type qg provient d'interactions entre un quark de valence (portant de l'ordre de $0.2 * E_{beam} = 180$ GeV) et un gluon de petite fraction d'impulsion.

Les sections efficaces de jets inclusives (1 ou plusieurs jets) mesurées par D0 au TeVatron ($\sqrt{s} = 1.96$ TeV) et par ATLAS au LHC (7 TeV), sont montrées à la figure 5.5. Remarquons que la variable p_T est également, mais indirectement reliée aux fractions d'impulsion des partons par les relations par l'espace des phases : $p_T^{MAX} = \frac{1}{2} \sqrt{x_1 x_2 s} = \frac{1}{2} \sqrt{\hat{s}}$.

On utilise aussi la pseudo-rapidité $\eta = -\ln \tan \theta/2 \simeq y$ qui est une grandeur purement angulaire équivalente à la rapidité si la masse peut être négligée :

$$y \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{|p| + p_z}{|p| - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \ln \left(\frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right)^{1/2} = -\ln \tan \theta/2 = \eta \quad (5.8)$$

On a alors les relations :

$$\cosh y = \frac{E}{p_T} \quad \text{et} \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{p_z}{p_T}$$

et inversement :

$$p^0 = \sqrt{M^2 + p_T^2} \cosh y, \quad x_1 = \sqrt{\tau} \exp(y) = \frac{M}{\sqrt{s}} \exp(y), \quad x_2 = \sqrt{\tau} \exp(-y) = \frac{M}{\sqrt{s}} \exp(-y)$$

processus	diagrammes	$ \overline{\mathcal{M}} ^2/g^4$
$q q' \rightarrow q q'$		$\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2}$
$q q \rightarrow q q$		$\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{s}^2 + \hat{t}^2}{\hat{u}^2} \right) - \frac{8}{27} \frac{\hat{s}^2}{\hat{u}\hat{t}}$
$q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$		$\frac{4}{9} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$		$\frac{4}{9} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} - \frac{2}{3} \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}\hat{t}} \right)$
$q\bar{q} \rightarrow gg$		$\frac{32}{27} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}} - \frac{8}{3} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$gg \rightarrow q\bar{q}$		$\frac{1}{6} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}\hat{u}} - \frac{3}{8} \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2}$
$gq \rightarrow gq$		$-\frac{4}{9} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}\hat{u}} + \frac{\hat{u}^2 + \hat{s}^2}{\hat{t}^2}$
$gg \rightarrow gg$		$\frac{9}{2} \left(3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{u}^2} \right)$

FIGURE 5.3 – Éléments de matrice élevés au carré pour les processus partoniques $2 \rightarrow 2$ à l'ordre le plus bas, $a + b \rightarrow c + d$, sommés sur les couleurs et moyennés sur les états de spin [24]. Les invariants utilisés sont définis comme suit : $\hat{s} = (p_a + p_b)^2$, $\hat{t} = (p_a - p_c)^2$, $\hat{u} = (p_b - p_c)^2$. Les diagrammes croisés n'ont pas tous été dessinés.

Cette mesure de section efficace s'étend sur huit ordres de grandeurs et présente un accord remarquable avec les prédictions QCD au NLO. Le rapport entre les mesures et les prédictions est montré à la figure 5.6. Les prédictions sont corrigées des effets d'underlying events et d'hadronisation par Monte Carlo (ces corrections partent de 20% et décroissent avec p_T jusqu'à 2%). L'incertitude expérimentale est dominée par celle sur l'échelle d'énergie de mesure des jets de 1.2% pour un $p_T > 100$ GeV. L'incertitude sur les prédictions théoriques (10–15%) est obtenue en la faisant varier entre $\mu_R = \mu_F = p_T/2$ et $\mu_R = \mu_F = 2p_T$. Un très bon accord est trouvé pour les prédictions basées sur les PDF MRTS2004 et les résultats sont en accords avec CTEQ6.5M. Ces résultats pourront donc servir pour mieux contraindre des PDF et en particulier les gluons car il y a une contribution importante des processus $gg \rightarrow gg$ et $gq \rightarrow gq$.

Une revue assez complète sur les jets au TeVatron et au LHC peut être trouvée à la référence [23].

L'importance de la section efficace de production de jets dépend bien entendu de la façon dont on définit un jet (dont le choix de l'algorithme de reconstruction et de la valeur de ses paramètres) et en particulier de la valeur minimale de son impulsion transverse.

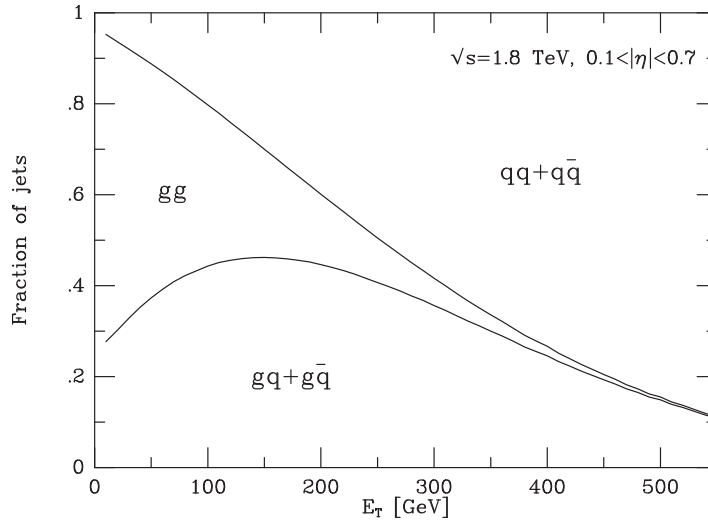


FIGURE 5.4 – Contributions relatives des différents types de processus de production de deux jets en fonction de leur impulsion transverse en pp à une énergie dans le centre de masse de 1.8 TeV.

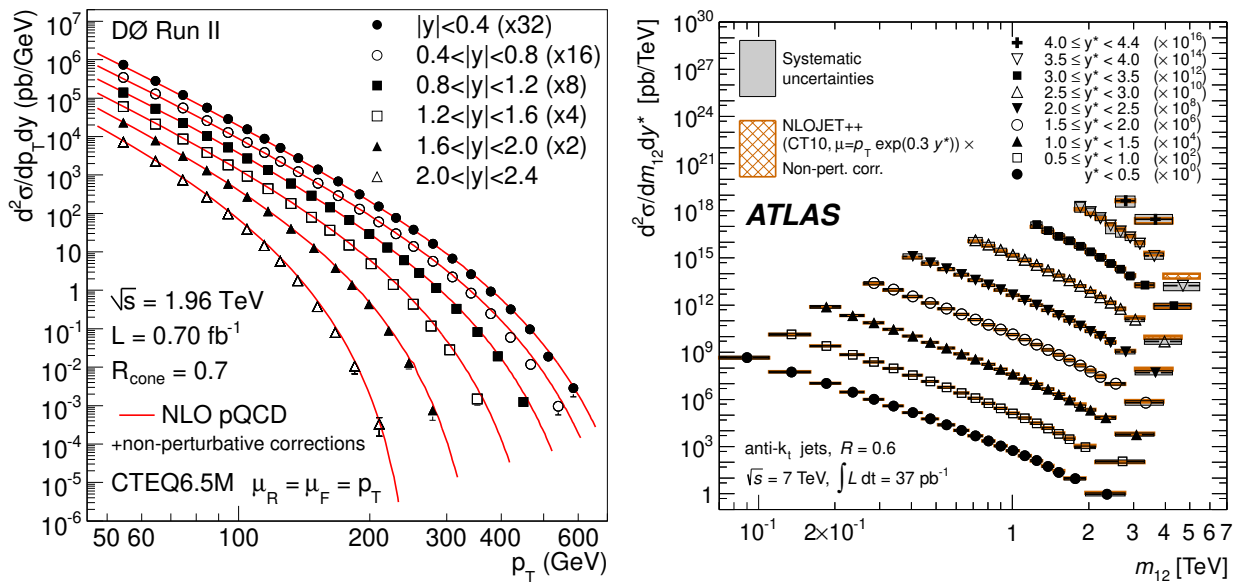


FIGURE 5.5 – Section efficace de jets mesurée par D0 en fonction de l’impulsion transverse du premier jet pour différents domaines en rapidité (y) [Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 062001] et par ATLAS en fonction de la masse invariante des deux premiers jets pour différents domaines en rapidité [Phys. Rev. D **86** (2012) 014022].

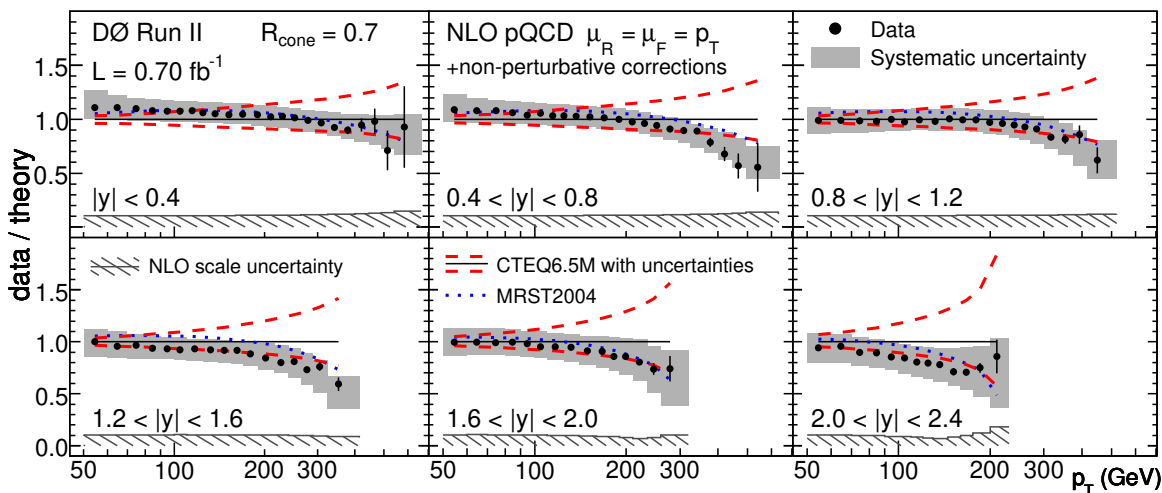


FIGURE 5.6 – Comparaison mesure/théorie de la section efficace de jets mesurée par D0 [Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 062001].

5.2 Remarques sur les factorisations QCD

Nous avons vu que les densités de partons extraites des mesures en diffusion ep permettent de prédire la section efficace de jets en interactions pp avec une grande précision et sur un domaine cinématique vaste. C'est là une confirmation puissante du caractère universel des densités de partons. Ce caractère universel n'est possible que si l'on a d'une part une factorisation QCD de la section efficace $ep \rightarrow eX$ et d'autre part de la section efficace $pp \rightarrow jet(s)XY$.

La factorisation QCD est donc un point essentiel. Elle est démontrée dans un certain nombre de cas (ou plutôt justifiée théoriquement sans que la démonstration soit parfaitement rigoureuse) : pour les sections efficaces totales, de jets et de quarks lourds que ce soit en ep ou en pp , à haute énergie et pour une échelle QCD (par exemple masse invariante d'un jet) suffisamment grande. Dans les autres cas, les choses sont plus délicates, et si la démonstration est possible, elle est plus ardue.

De façon intuitive on peut se dire qu'à haute énergie le facteur de boost de Lorentz sur les partons incidents d'un hadron du faisceau est tellement grand que les partons se déplacent quasiment à la vitesse de la lumière. En cas de collisions pp les partons incidents d'un hadron et de l'autre ne sont donc pas capables, suivant le principe de causalité, d'échanger de l'information de quelque manière que ce soit. On s'attend donc qu'aux énergies suffisamment hautes, les interactions des états initiaux tendent vers zéro. L'interaction dure, quant à elle, se déroule sur une durée très brève et voit les hadrons initiaux comme dans un état gelé. De même que pour les états initiaux, les états finaux s'écartent à une vitesse telle que l'échange d'information est impossible. La plus grosse part du problème provient en général de la difficulté d'absorber la divergence colinéaire dans les distributions de partons. Si elles présentent une dépendance en $\log Q^2$ elles peuvent être absorbées dans la définition des densités de partons. Sinon, c'est plus problématique.

D'un point de vue technique pour démontrer une factorisation QCD, il faut donc classer les termes en puissance de Q^2 . La démonstration sera faite si l'on arrive à associer un à un les termes en $\log Q^2$ à une densité de partons initiale (qui absorbe les divergences UV) et que les autres termes puissent être mis dans le higher twist, c'est-à-dire qu'ils soient en une puissance négative de Q et donc tendent à disparaître aux Q^2 asymptotiquement grands. La théorie ne dit pas à partir de quelle valeur le terme factorisable (leading

twist) domine. La surprise fut d’observer que la factorisation QCD semble être valable dès $Q^2 \simeq 1 \text{ GeV}^2$ en diffusion ep . C’est-à-dire à peine au dessus de la masse du proton.

Du point de vue de la physique au LHC, la priorité est maintenant la mesure la plus précise possible du boson de Higgs, pour savoir si la particule découverte à 125 GeV est précisément le boson de Higgs du Modèle Standard ou un boson scalaire parmi d’autres. Il faut donc mesurer les taux de branchements dans tous les canaux de désintégration mais également étudier les mécanismes de production : $g + g \rightarrow H$, $q + \bar{q} \rightarrow W^+ + W^- \rightarrow H, \dots$. Le premier processus, $g + g \rightarrow H$, qui domine largement est proche du processus Drell-Yan.

5.3 Le processus Drell-Yan

Le processus Drell-Yan correspond à l’annihilation d’un quark et d’un anti-quark produisant un photon ou un Z (réel ou virtuel) qui à son tour donne naissance à plusieurs particules. Le plus souvent, c’est la production d’une paire de leptons chargés (e^+e^- ou $\mu^+\mu^-$) qui est utilisée. Il joua un rôle important dans la découverte du J/Ψ (collisions p-Be aux AGS-Brookhaven en 1974), du Υ (1977), du W et du Z ($p\bar{p}$ UA1 et UA2 - CERN en 1983) et constitue un canal privilégié dans les mesures de précision au LHC. Par ailleurs les mesures du processus Drell-Yan apportent des contraintes importantes pour la détermination des PDF. Nous nous intéresserons, ici, aux aspects liés à QCD et à la structure hadronique (PDF). Pour plus de détails, voir par exemple [22].

5.3.1 A l’ordre le plus bas

L’expression de la section efficace $q\bar{q} \rightarrow e^+e^-$ (voir figure 5.3.1) est purement électro-faible et donné par inversion du temps appliquée à la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ que nous avons longuement discutée dans le chapitre 3². Nous avons obtenu :

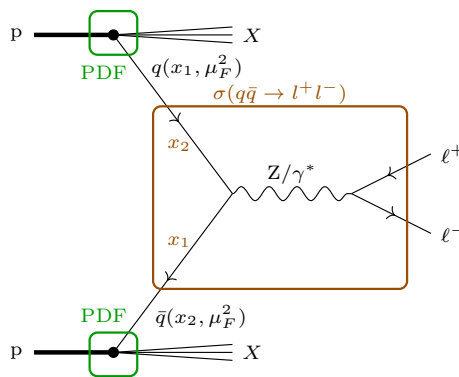


FIGURE 5.7 – Processus Drell-Yan à l’ordre le plus bas en collisions proton-proton.

$$\frac{d\sigma_{e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}}}{d\Omega} = N_c \frac{\alpha^2}{4s} e_q^2 (1 + \cos^2 \theta) = N_c \frac{\alpha^2}{4s} e_q^2 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \tag{5.11}$$

2. On remarquera au passage que si l’on croise le diagramme on retrouve la diffusion profondément inélastique (DIS).

où nous avons sommé sur les états de couleur de l'état final. Dans le cas présent, il faut moyenner sur les états de couleurs de l'état initial, on trouve donc :

$$\frac{d\sigma_{q\bar{q} \rightarrow e^- e^+}}{d\Omega} = \frac{1}{N_c} \frac{\alpha^2}{4s_{q\bar{q}}} e_q^2 \frac{t^2 + u^2}{s_{q\bar{q}}^2} \quad \sigma(q\bar{q} \rightarrow e^- e^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{9s_{q\bar{q}}} e_q^2 \quad (5.12)$$

En termes de la section efficace pp , la masse M invariante de la paire $e^- e^+$ est une variable interne et il faut que x_1 et x_2 soient tels que la bonne masse puisse être créée, cela donne donc :

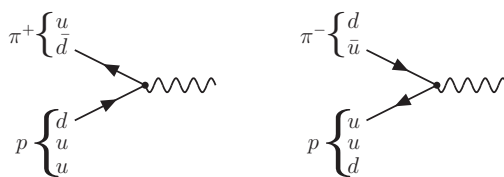
$$\frac{d\sigma_{pp \rightarrow e^- e^+ X}}{dM^2} = \sum_{q, \bar{q}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 [f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2) + (q \leftrightarrow \bar{q})] \frac{d\sigma(q\bar{q} \rightarrow e^- e^+)}{dM^2} \delta(M^2 - s_{q\bar{q}}) \quad (5.13)$$

avec $s_{q\bar{q}} = x_1 x_2 s$. En explicitant l'expression de $\sigma(q\bar{q} \rightarrow e^- e^+)$, on peut écrire la section efficace sous la forme :

$$\frac{d\sigma_{pp \rightarrow e^- e^+ X}}{dM^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{9} \frac{1}{M^2} \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{dx_2}{s_{q\bar{q}}} [f_q(x_1) f_{\bar{q}}(x_2) + (q \leftrightarrow \bar{q})] \delta(1 - s_{q\bar{q}}/M^2) \quad (5.14)$$

$$\sim \frac{1}{M^2} f(x_1, x_2) \quad (5.15)$$

où l'on a utilisé la propriété $\delta(M^2 - s_{q\bar{q}}) = \frac{1}{M^2} \delta(1 - s_{q\bar{q}}/M^2)$. Comme en diffusion profondément inélastique, on voit apparaître l'invariance d'échelle dans la section efficace du Drell-Yan, car la seule dépendance en l'échelle M est issue du terme cinématique calculé ($1/M^2$) (pour autant que les distributions de partons n'en dépendent pas). Cette invariance d'échelle est bien observée comme le montre la figure 5.8. En d'autres termes les diffusions hadrons-hadrons mettent également en évidence leur structure en constituants ponctuels. En utilisant des distributions de partons mesurées dans les diffusions profondément inélastiques dans le cadre du modèle naïf des partons, on obtient la prédiction notée CDHS sur la figure. Si la dépendance en la variable l'échelle M est bien décrite, en revanche la valeur absolue de la section efficace prédite est presque deux fois trop basse. La figure 5.8 de droite montre la différence des section efficaces Drell-Yan pour des faisceaux de pions de charges différentes. L'invariance d'échelle est chaque fois observée est la différence de normalisation entre les deux charges s'explique par les différentes compositions en quarks dominants la section efficace, puisque dans le proton la densité de u est environ deux fois supérieure, et qu'ils interviennent différemment comme l'illustre ce schéma :



Mis à part le problème de la différence de normalisation entre la prédiction et les mesures, un désaccord est aussi prononcé dans la dépendance en l'impulsion transverse de la paire de leptons produits, comme illustré à la figure 5.9.

On peut s'attendre à une contribution à l'impulsion transverse due au mouvement de Fermi des quarks dans le proton du type :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2\sigma}{d^2p_T} = \frac{b}{2\pi} \exp\left(-\frac{b p_T^2}{2}\right) \quad (5.16)$$

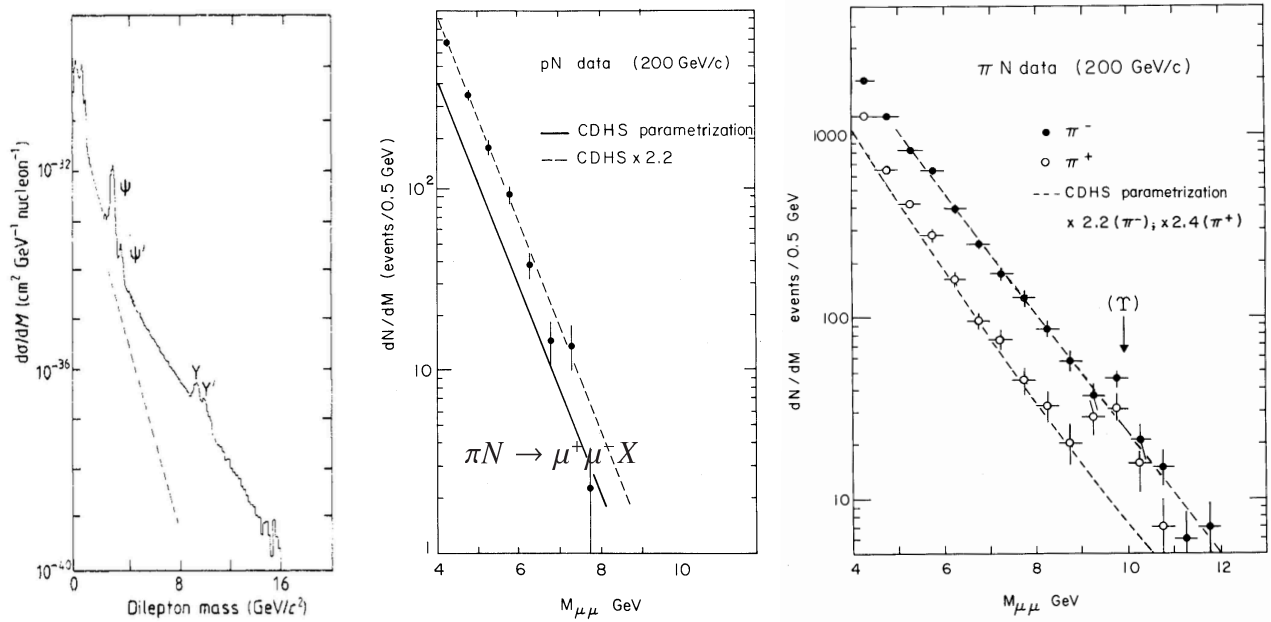


FIGURE 5.8 – A gauche : masse invariante des deux muons dans une expérience de p (400 GeV) sur cible de platine (Pt) ([Ito et al. 1981]. Au milieu : Invariance d'échelle observée dans le processus Drell-Yan dans la diffusion de protons sur nucléons [NA3 - PLB 78 (1979)]. A droite : idem mais avec un faisceau de pions de différentes charges [NA3 - PLB 78 (1979)].

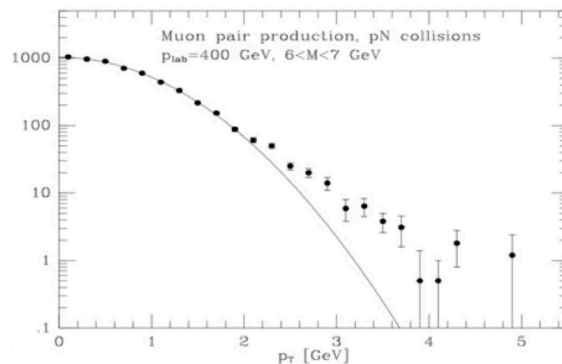
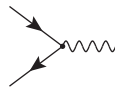
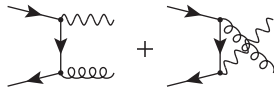
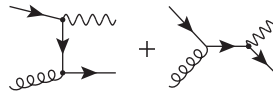


FIGURE 5.9 – Distribution en impulsion transverse du processus Drell-Yan comparée à la prédiction naïve [A.S. Ito et al. Phys. Rev. D23 :604,1981]

Les quarks sont confinés dans des protons d'une taille $\Delta x = 0.87$ fm, l'incertitude d'Heisenberg, donne une impulsion $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x \simeq 113$ MeV pour chaque direction du plan transverse et pour chaque proton. En les combinant quadratiquement cela donne une impulsion transverse d'environ 500 MeV. Un ajustement des données aux petites valeurs de l'impulsion transverse mène à la valeur de 760 MeV. Cela ne peut expliquer la présence d'événements aux grandes valeurs de p_T pour lesquels il faut considérer les contributions des ordres supérieurs de QCD.

5.3.2 Emission d'un jet supplémentaire (NLO)

Au premier ordre supérieur en α_S , nous trouvons les contributions données dans la table ci-dessous.

LO	NLO	
	processus d'annihilation	processus QCD
$q + \bar{q} \rightarrow \gamma^*$	$q + \bar{q} \rightarrow g + \gamma^*$	$q + g \rightarrow q + \gamma^*$
		
1	$16\pi^2 \alpha_S \alpha \frac{8}{9} \left[\frac{\hat{u}^2}{\hat{t}^2} + \frac{\hat{t}^2}{\hat{u}^2} + \frac{2M^2 \hat{s}}{\hat{u}\hat{t}} \right]$	$16\pi^2 \alpha_S \alpha \frac{1}{3} \left[-\frac{\hat{t}^2}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}^2}{\hat{t}^2} - \frac{2M^2 \hat{u}}{\hat{s}\hat{t}} \right]$

La prise en compte de ces diagrammes supplémentaires revient à considérer la possible présence d'un jet dans l'état final. Le vertex QCD supplémentaire induit une dépendance décroissante beaucoup plus douce avec p_T que le terme exponentiel de la gaussienne du mouvement de Fermi. Le résultat comparé aux mesures est donné à la figure 5.10, détaillant les différentes contributions en fonction de p_T .

Outre la bonne description de la dépendance en p_T , il est remarquable d'observer que la normalisation de la section efficace est également bien prédite. La correction du premier ordre en α_S est donc une correction de près de 100%. Il n'est pas rare que l'ordre suivant des corrections radiatives soit important quand celui-ci apporte un nouveau type de diagrammes. C'est le cas ici des diagrammes possédant un gluon dans l'état initial.

Bien évidemment un traitement complet du NLO exige la prise en compte des corrections virtuelles qui annuleront les divergences de façon similaire à ce que nous avons vu au chapitre 3. L'expression complète de la section efficace au NLO peut être trouvée par exemple dans [1].

5.3.3 Contraintes sur les PDF

Le processus Drell-Yan apporte un moyen important de contraindre les PDF, et en particulier le rapport \bar{d}/\bar{u} qui apporta une surprise. En comparant différentes sections efficaces Drell-Yan, et en utilisant la symétrie d'hypercharge telle que $u = u_p = d_n$ et $d = d_p = u_n$ et en se limitant à deux saveurs :

$$\sigma^{pp} \sim \frac{4}{9} u(x_1) \bar{u}(x_2) + \frac{1}{9} d(x_1) \bar{d}(x_2) \quad (5.17)$$

$$\sigma^{pn} \sim \frac{4}{9} u(x_1) \bar{d}(x_2) + \frac{1}{9} d(x_1) \bar{u}(x_2) \quad (5.18)$$

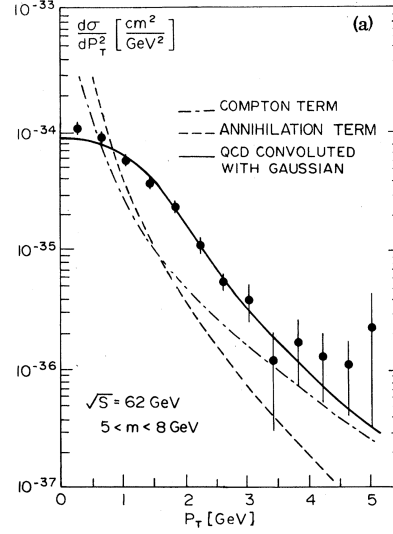


FIGURE 5.10 – Section efficace Drell-Yan pp , des ISR du CERN à 62 GeV dans le centre de masse, comparée à la prédiction théorique prenant en compte les corrections QCD au premier ordre (effet de normalisation et de forme aux grandes valeurs de p_T) et d'effet de mouvement de Fermi (effet aux petites valeurs de p_T) [Phys. Rev. Lett. 48, 302 (1982)].

On a donc le rapport des collisions proton-deutéron et proton-proton :

$$\frac{\sigma^{pd}}{2\sigma^{pp}} = \frac{(1 + \frac{1}{4} \frac{d(x_1)}{u(x_1)})}{(1 + \frac{1}{4} \frac{d(x_1)\bar{d}(x_2)}{u(x_1)\bar{u}(x_2)})} (1 + \frac{\bar{d}(x_2)}{\bar{u}(x_2)}) \simeq 1 + \frac{\bar{d}(x_2)}{\bar{u}(x_2)} \quad (5.19)$$

Les mesures de ce rapport, par l'expérience E866 de la figure 5.11, montrent que les contributions des quarks \bar{u} et \bar{d} (de la mer) ne sont pas identiques. Aucune symétrie ne contraint ce rapport, mais cela reste néanmoins étonnant ou du moins contre-intuitif. On les attribuent à des effets électromagnétiques : les quarks u et d n'ayant pas la même charge électrique ils seront différemment produit au sein du champ électromagnétique qui règne dans les nucléons. Mais ces effets n'ont pas pu encore être calculés. Les mesures montrées ci-dessus impliquèrent des modifications importantes (à l'époque) de la paramétrisation des densités de quarks dans la région de la valence.

5.3.4 La contribution du Z

Aux énergies suffisamment élevées la contribution du Z devient importante. La discussion ici est à nouveau très similaire au cas $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ discuté au chapitre 3.4.

La section efficace, à l'ordre le plus bas, en tenant compte du photon et du boson Z vaut :

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-) = \frac{\pi\alpha^2}{3s_{q\bar{q}}N_c} \left[(e_q^2 - 2e_q v_l v_q \mathcal{S}_{\gamma/Z}(s_{q\bar{q}}) + (a_l^2 + v_l^2)(a_q^2 + v_q^2) \mathcal{S}_Z(s_{q\bar{q}}) \right] \quad (5.20)$$

où les v et a représentent les couplages vectoriel et axial du Z aux fermions q et l (voir chapitre 3.4). Le terme dû à l'interférence γ/Z s'exprime comme :

$$\mathcal{S}_{\gamma/Z}(s_{q\bar{q}}) = k \frac{s_{q\bar{q}}(s_{q\bar{q}} - M_Z^2)}{(s_{q\bar{q}} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2} \quad (5.21)$$

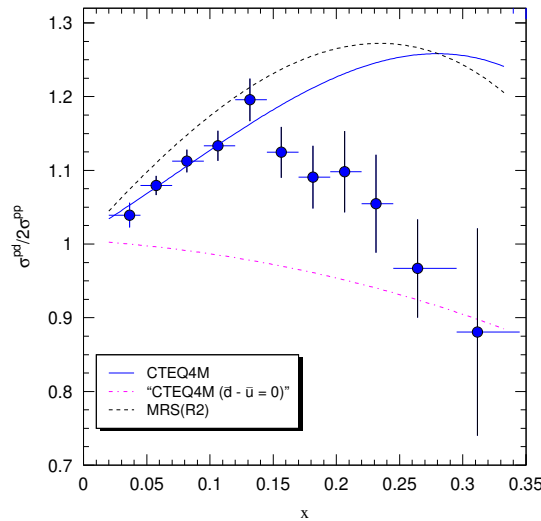


FIGURE 5.11 – Mesure du rapport des sections efficaces Drell-Yan en pd et pp par l'expérience E866 [Phys.Rev. D64 (2001) 052002] comparée à différentes prédictions [Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 49 :217-253,1999].

et le terme de la contribution du Z

$$\mathcal{S}_Z(s_{q\bar{q}}) = k^2 \frac{s_{q\bar{q}}^2}{(s_{q\bar{q}} - M_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 M_Z^2} \quad (5.22)$$

où

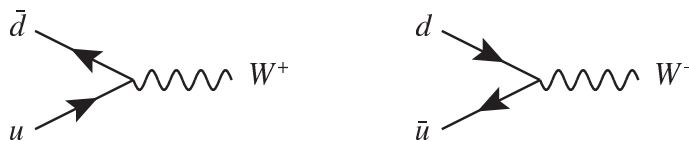
$$k = \frac{\sqrt{2}G_F M_Z^2}{4\pi\alpha} \quad (5.23)$$

représente le rapport sans dimension des couplages faible sur électromagnétique.

La figure 5.12 présente les mesures du processus Drell-Yan aux alentours du pic du Z par les expériences D0 et CDF du TeVatron (figure de gauche) et de CMS au LHC (figure de droite). En tenant compte de l'ordre supérieur (NLO) un très bon accord est observé. Si l'on garde la dépendance angulaire, on trouve de façon identique au processus de création de quarks ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$), en plus du terme habituel en $(1 + \cos^2 \theta)$, un terme en $\cos \theta$ provenant de l'interférence entre les courants vectoriel et axial du couplage électrofaible (voir équation 3.29). Ce terme est à l'origine d'une asymétrie avant-arrière (A_{FB}) illustrée à la figure 5.12.

5.3.5 Production du boson W

L'annihilation de deux quarks de saveurs différentes et de charges différentes en un W (en particulier $u\bar{d} \rightarrow W^+$ et $\bar{u}d \rightarrow W^-$) :



est un processus dont l'étude a mené à des résultats importants dont le tout premier est la découverte du W , en 1983, et la mesure de sa masse. Du point de vue de QCD et de la structure hadronique il permet de contraindre avantageusement les PDF car il donne accès direct à un mélange de la mer et de la valence en

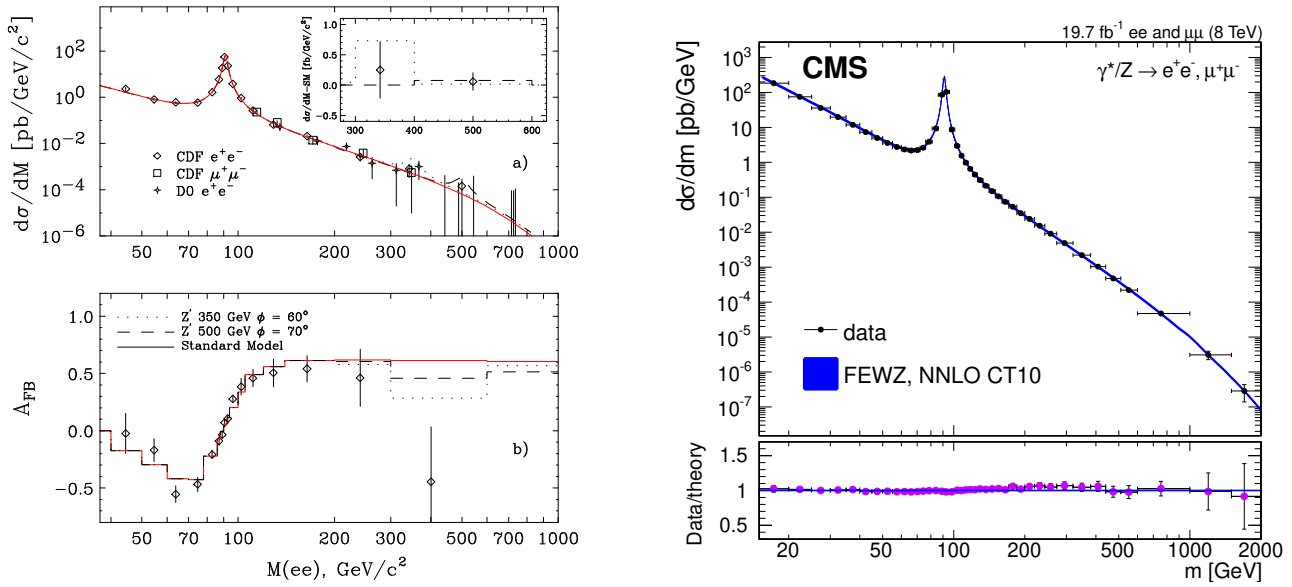


FIGURE 5.12 – Mesures du processus Drell-Yan aux alentours du pic du Z par les expériences D0 et CDF du TeVatron (à gauche) et de CMS au LHC [Eur. Phys. J. C 75 (2015) 147] (à droite).

collisions pp .

La section efficace au niveau partonique s'écrit :

$$\sigma(q\bar{q}' \rightarrow W) = \frac{2\pi G_F M_W^2}{3\sqrt{2}} |V_{q\bar{q}'}|^2 \delta(s_{q\bar{q}'} - M_W^2) \quad (5.24)$$

où $V_{q\bar{q}'}$ est l'élément de la matrice de Kobayashi-Maskawa correspondant aux deux quarks considérés.

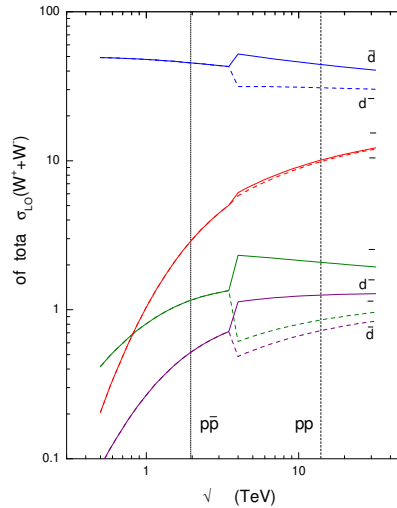


FIGURE 5.13 – Décomposition en saveurs de la production de W^+ et W^- en fonction de l'énergie dans le centre de masse $p\bar{p}$ pour $\sqrt{s} < 2$ TeV et pp pour $\sqrt{s} > 2$ TeV. [Figure de James Stirling].

Lors de collisions $p\bar{p}$ le W^+ peut être produit à partir des pics de valence en u du proton et en \bar{d} de l'anti-proton. Par symétrie, la formation d'un W^+ en $p\bar{p}$ est donc liée au produit $u_p \bar{d}_{\bar{p}} = u_p d_p = ud$. En

définissant l'asymétrie :

$$A(y) = \frac{\frac{d\sigma}{dy}(W^+) - \frac{d\sigma}{dy}(W^-)}{\frac{d\sigma}{dy}(W^+) + \frac{d\sigma}{dy}(W^-)} = \frac{u(x_1)d(x_2) - d(x_1)u(x_2)}{u(x_1)d(x_2) + d(x_1)u(x_2)} = \frac{R_{du}(x_2) - R_{du}(x_1)}{R_{du}(x_2) + R_{du}(x_1)} \quad (5.25)$$

où $R_{du}(x) = d(x)/u(x)$. En utilisant les relations

$$x_1 = x_0 e^y \simeq x_0(1+y) \quad x_2 = x_0 e^{-y} \simeq x_0(1-y) \quad (5.26)$$

où le x_0 correspond au x pour une rapidité $y = 0$. En développement de Taylor :

$$R_{du}(x_1) = R_{du}(x_0) + y x_0 R'_{du}(\tau) \quad R_{du}(x_2) = R_{du}(x_0) - y x_0 R'_{du}(\tau) \quad (5.27)$$

où R' est la dérivée de R par rapport à la rapidité et $\tau = x_1 x_2$. Et donc :

$$A(y) = -y x_0 \frac{R'_{du}(x_0)}{R_{du}(x_0)} \quad (5.28)$$

Malheureusement on ne mesure pas directement les W , mais le lepton chargé de leurs désintégrations $W^+ \rightarrow l^+ \nu_l$ et $W^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$. On mesure donc l'asymétrie en utilisant la rapidité du lepton chargé, ce qui n'est pas un accès direct au rapport d/u mais permet de contraindre les paramétrisations des PDF, comme illustré à la figure 5.14.

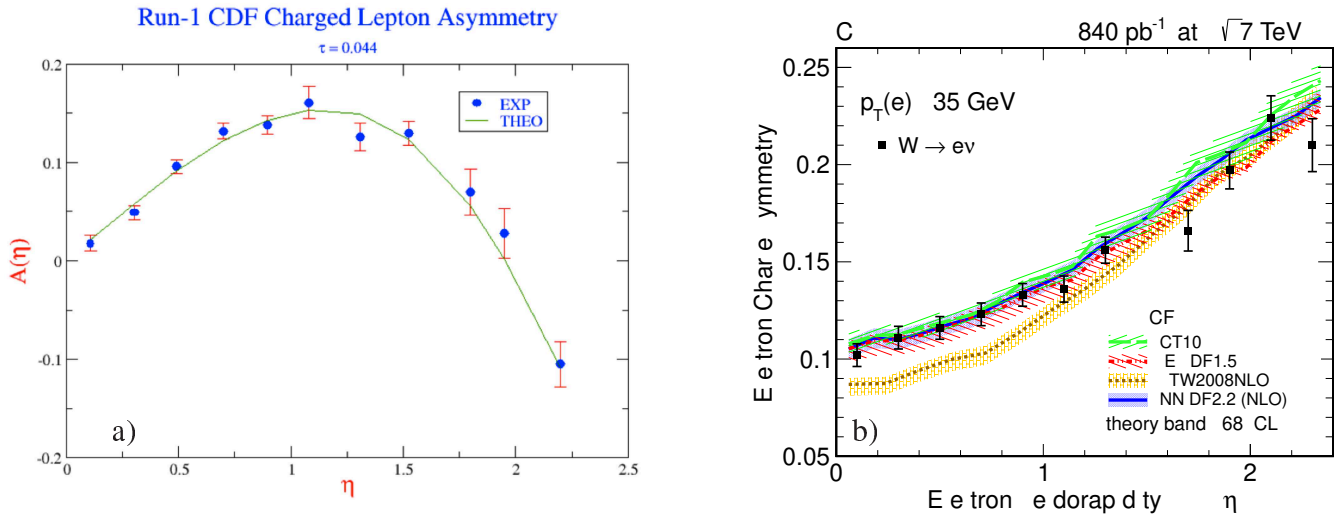


FIGURE 5.14 – Mesures de l'asymétrie de la production de W en fonction de la pseudo-rapidité du lepton chargé de l'état final, mesurée par l'expérience CDF [F.Abe et al., CDF Coll., PRL 81, 5754 (1998)] (a) et par l'expérience CMS [Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111806] (b).

5.4 Remarques en guise de conclusion

La chromodynamique quantique figure au palmarès des plus importants succès scientifiques. En une vingtaine d'années elle est passée du statut de modèle à celui de la théorie des interactions fortes. En présence d'une échelle dure, les prédictions perturbatives de QCD sont en accord avec les mesures expérimentales avec une précision parfois en deçà du pourcent, portant sur une très large diversité de processus et dans un domaine cinématique extrêmement vaste, dont nous avons vu les résultats les plus marquants. S'il reste

quelques zones d'ombre elles tiennent surtout à notre habilité à manipuler QCD, à son domaine de validité dans une approche perturbative, ou encore aux limite de l'approche de factorisation mais ne mettent nullement la validité de la théorie en question.

Une grande variété de phénomènes observés ou attendus mais inobservés reste pourtant présente et constitue autant de sujets de recherche d'actualité. Pour n'en citer que quelques-uns :

- la question de la saturation de la densité de gluons (que nous avons évoquée au chapitre précédent)
- à très grande énergie la dynamique partonique devrait être décrite par d'autres équations que DGLAP, ce sont les équations BFKL, qui devrait prévaloir aux petites valeurs de x . Cette dynamique n'a pas encore été clairement mise en évidence.
- nous avons discuté longuement les PDF qui représentent les distributions d'impulsions longitudinales. Quand est-il de leurs distributions spatiales dans la direction transverse. Une classe d'événements donne accès à ces distributions transverses et permet a priori de réaliser une image 3D du proton.
- de même un approche plus complète devrait inclure l'impulsion transverse qui peuvent être prédites suivant une approche similaire à DGLAP.
- d'où provient le spin du proton? Comment se repartit-il entre spin et moment angulaire des quarks et des gluons? C'est là un vaste programme de recherche actif depuis de nombreuses années mais qui reste encore largement incompris.
- par quels processus les factorisations QCD sont-elles brisées dans certains cas?
- comprendre les phénomènes diffractifs et ceux des échanges de plusieurs partons en même temps.
- que se passe-t-il dans des noyaux plus lourds?

Bibliographie

La plupart des références sont données dans le texte.

Références générales

- [1] Ellis, R.K., Stirling, W.J. and Webber B.R., *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [2] F. Halzen, A.D. Martin, *Quarks & Leptons*, Wiley, New York, 1984.

Chapitre 1 : Introduction

- [3] Y. Kitazawa, “Testing the PCAC Prediction for the π^0 Lifetime,” *Phys. Lett. B* **151** (1985), 165-170.

Chapitre 2 : Bases de QCD

- [4] Muta, T., *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore, Singapore, 1987.
- [5] Gribov, V.N., “QCD at large and short distances (annotated version),” *Eur. Phys. J. C* **10** :71, 1999 [arXiv :hep-ph/9807224];
- [6] Gross, D.J. and Wilczek, F., *Phys. Rev. Lett.* **30** :1343, 1973 ;
Politzer, H.D., *Phys. Rev. Lett.* **30** :1346, 1973.
- [7] M. Battaglia, R. Orava and L. Salmi, A study of depletion of fragmentation particles at small angles in b-jets with the DELPHI detector at LEP, DELPHI 2004-037 CONF 712, Contributed paper to International Conference on High Energy Physics 2004, Beijing.

Chapitre 3 : e^+e^-

- [8] C. Peterson, D. Schlatter, I. Schmitt, P.M. Zerwas, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 105
- [9] S. Bethke et al. (JADE Collaboration), *Phys. Lett.* **213B** (1988) 235 ; for improved algorithms, see N. Brown and W.J. Stirling, Durham preprint, RAL-91-049 DTP/91/30 (June 1991).
- [10] P. Pfeifenschneider *et al.* [JADE collaboration], “QCD analyses and determinations of $\alpha(s)$ in e^+e^- annihilation at energies between 35 GeV and 189 GeV,” *Eur. Phys. J. C* **17** (2000) 19 [arXiv :hep-ex/0001055].
- [11] S. Kluth, “Tests of quantum chromo dynamics at e^+e^- colliders,” *Rept. Prog. Phys.* **69** (2006) 1771 [arXiv :hep-ex/0603011].
- [12] S. Catani, Yu.L. Dokshitzer, M. Olsson, G. Turnock and B.R. Webber, “New clustering algorithm for multijet cross sections in e^+e^- annihilation”, *Phys. Lett. B* **269** (1991) 432

Chapitre 4 : ep

- [13] R. Brock *et al.* [CTEQ Collaboration], “Handbook of perturbative QCD : Version 1.0,” Rev. Mod. Phys. **67** (1995) 157. Accessible sur le site <http://www.phys.psu.edu/~cteq/>
- [14] <http://durpdg.dur.ac.uk/HEPDATA/PDF>
- [15] E.D. Bloom, et al., Phys. Rev. Lett. **23**, 930 (1969); M. Breidenbach, et al., Phys. Rev. Lett. **23**, 935 (1969).
- [16] R. Hofstadter and R.W. McAllister, Phys. Rev. **98**, 217 (1955).
- [17] J. C. Collins, D. E. Soper and G. Sterman, “Factorization For Short Distance Hadron - Hadron Scattering,” Nucl. Phys. B **261** (1985) 104.
- [18] Y.L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73** (1977) 1216].
- [19] V.N. Gribov and L.N. Lipatov, Yad. Fiz. **15** (1972) 781 [Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 438].
- [20] G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. B **126** (1977) 298.
- [21] François Gelis, Tuomas Lappi, Raju Venugopalan, High Energy Scattering in Quantum Chromodynamics, Lectures given at the Xth Hadron Physics Workshop, March 2007, Florianopolis, Brazil. CERN-PH-TH/2007-131, arXiv :0708.0047 [hep-ph].

Chapitre 5 : *pp*

- [22] G. Altarelli, R. K. Ellis and G. Martinelli, “Leptoproduction and Drell-Yan Processes Beyond the Leading Approximation in Chromodynamics”, Nucl. Phys. B **143** (1978) 521 [Erratum-ibid. B **146** (1978) 544].
- [23] S. D. Ellis, J. Huston, K. Hatakeyama, P. Loch and M. Tonnesmann, Prog. Part. Nucl. Phys. **60** (2008) 484 [arXiv :0712.2447 [hep-ph]].
- [24] B. L. Combridge, J. Kripfganz and J. Ranft, “Hadron Production at Large Transverse Momentum and QCD”, Phys. Lett. B **70** (1977) 234.
- [25] Mangano, Michelangelo L., “Introduction to QCD”, CERN-OPEN-2000-255, 1999.