Université Libre de Bruxelles

Faculté des Sciences


# Étude d'un grand prototype de chambre à projection temporelle (TPC) et reconstruction de traces par filtre de Kalman

**Mémoire de fin d'études**


**Thierry MAERSCHALK**

*Directeur de mémoire*
Dr. Gilles De Lentdecker



Année académique 2010-2011

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le Docteur Gilles De Lentdecker de m'avoir proposé ce sujet de mémoire et d'avoir accepté de m'encadrer tout au long de cette année académique.

Je souhaite aussi remercier le groupe de recherche de Saclay de m'avoir permis d'étudier leur prototype, et de participer à la prise de données, et en particulier le docteur P. Colas, le docteur D. Attié, ainsi que W. Wang.

Je voudrais aussi remercier tous mes camarades physiciens et en particulier Alexandre Léonard et Laurent Thomas pour toutes les aides "LaTeX et ROOT" tout au long de l'année, ainsi que pour leur présence autour de la machine à café.

Je tiens finalement à remercier tous les membres du service de l'IIHE pour leur accueil et en particulier les chefs de service : les professeurs Catherine De Clercq et Pierre Marage.

# Table des matières

**1 Introduction** **1**

**2 Principe des détecteurs à gaz** **3**

2.1 Introduction . . . . . 3

2.2 Principe général d'une chambre à projection temporelle (TPC) . . . . 4

2.3 Ionisation . . . . . 6

2.3.1 Perte d'énergie dans le gaz . . . . . 6

2.3.2 Ionisation primaire et totale . . . . . 7

2.3.3 Collisions ionisantes . . . . . 8

2.3.4 Diffusion multiple . . . . . 9

2.4 Vitesse de dérive des électrons et des ions dans un gaz . . . . . 10

2.4.1 Cinétique des gaz sans champ extérieur . . . . . 10

2.4.2 Dérive et diffusion en présence de champs extérieurs : modèle macroscopique . . . . . 11

2.4.3 Dérive et diffusion en présence de champs extérieurs : modèle microscopique . . . . . 12

2.4.4 Dérive des ions . . . . . 16

2.5 Développement de l'avalanche . . . . . 17

2.6 Gaz de remplissage . . . . . 19

2.7 Formation du signal . . . . . 20

2.7.1 Électrode non-segmentée . . . . . 20

2.7.2 Électrode segmentée . . . . . 21
2.7.3 Courants induits . . . . . 21
2.8 Mesure de l'impulsion d'une particule . . . . . 22

**3 Détecteur TPC à micro-structures 27**
3.1 Introduction . . . . . 27
3.2 Détecteur à gaz à micropistes (MSGC) . . . . . 28
3.3 Gas Electron Multiplier . . . . . 30
3.4 MICRO MEsh GAseous Structure . . . . . 31
3.5 Exemples de TPC actuels . . . . . 32
3.5.1 La TPC d'ALICE . . . . . 33
3.5.2 La TPC de l'expérience T2K . . . . . 34
3.6 Paramètres pour une future grande TPC . . . . . 35

**4 Dispositif expérimental à DESY 39**
4.1 Introduction . . . . . 39
4.2 Faisceau . . . . . 39
4.3 Grand prototype de TPC (LP-TPC) . . . . . 40
4.4 Modules Micromegas . . . . . 42
4.5 Le gaz T2K . . . . . 44
4.6 Électronique (AFTER) . . . . . 45
4.7 Analyse des données brutes . . . . . 47
4.8 Mesure de la vitesse de dérive . . . . . 48
4.9 Sélection des traces . . . . . 50
4.10 Mesure de la position . . . . . 52
4.10.1 Barycentre de charges . . . . . 53
4.10.2 Pad Response Fonction . . . . . 53

**5 Filtre de Kalman** **57**

5.1 Introduction . . . . . 57

5.2 Estimateur . . . . . 57

5.2.1 Définitions et propriétés . . . . . 57

5.2.2 La méthode des Moindres Carrés . . . . . 58

5.3 Filtre récursif . . . . . 59

5.3.1 Exemple . . . . . 59

5.3.2 Généralisation . . . . . 60

5.4 Filtre de Kalman discret . . . . . 61

5.4.1 Mise à jour de la matrice de covariance . . . . . 63

5.4.2 Choix optimal de la matrice de poids $K_k$ . . . . . 64

5.4.3 Extrapolation au site suivant . . . . . 64

5.4.4 Forme simplifiée de la matrice de gain $K_k$ . . . . . 65

5.5 Application du filtre de Kalman à l'ajustement de traces . . . . . 66

5.5.1 Équations du filtre de Kalman étendu . . . . . 66

5.5.2 Le vecteur d'état et la fonction de propagation . . . . . 68

5.5.3 Diffusion multiple . . . . . 71

5.5.4 Équation de la mesure et projection . . . . . 72

5.6 Implémentation . . . . . 74

5.7 Résultats . . . . . 75

5.7.1 Mise au point des méthodes de reconstruction . . . . . 76

5.7.2 Données des tests en faisceau de mars 2010 . . . . . 79

5.7.3 Résolution ultime . . . . . 85

**6 Conclusions** **89**

# Chapitre 1

# Introduction

La physique des hautes énergies est un domaine qui requiert, au niveau expérimental, des technologies toujours plus poussées.
Le but de cette discipline est l'étude des composants "ultimes" de la matière appelés particules élémentaires. Pour étudier ces particules, les physiciens ont à leur disposition des grands accélérateurs de particules tels que le LHC (Large Hadron Collider) au CERN.
Le LHC est avant tout une machine de découverte, conçue pour sonder un territoire encore inexploré de la physique des particules. Il a notamment pour objectifs, la découverte du boson de Higgs ainsi que de mettre en évidence de la physique au delà du modèle standard. Si le LHC découvre de nouvelles particules, il sera nécessaire de construire des nouveaux collisionneurs à leptons pour pouvoir étudier en détail ces nouvelles particules. Ainsi, plusieurs projets de collisionneurs linéaires électron-positron ont déjà été proposés et les programmes de recherche et développement des détecteurs envisagés pour de tels accélérateurs sont déjà bien avancés.
Plusieurs concepts d'expériences sont ainsi à l'étude et beaucoup parmi ceux-ci proposent d'utiliser une grande chambre à projection temporelle (TPC) comme élément principal du système de reconstruction de traces (le trajectographe). Typiquement, un tel détecteur aura une longueur de 2 $m$ dans la direction des faisceaux et un rayon externe de 2 $m$.
Pour ces grandes TPC, il est actuellement envisagé d'utiliser des micro-structures du type Micromegas ou GEM pour fournir la multiplication des électrons de dérive par avalanche. Ces avalanches seraient détectées par des anodes rectangulaires de quelques $mm^2$. Avec cette géométrie la TPC devrait atteindre une résolution spatiale de l'ordre de 100 microns sur la coordonnée $r - \phi$ lorsqu'elle est baignée dans un champ magnétique de 3.5 $T$. Pour atteindre ces performances, le plan d'anodes des Micromegas doit être recouvert d'une couche résistive.

Cette technologie est encore récente et de nombreuses études restent à faire. L'objectif de ce mémoire consiste d'une part à approfondir les connaissances des performances des TPC équipées de Micromegas à couche résistive et d'autre part à mettre en place un algorithme récursif de reconstruction de traces, le filtre de Kalman, afin de procéder à des mesures de la résolution spatiale.

Au chapitre 2, nous décrivons le principe de fonctionnement des détecteurs à gaz. Nous décrivons de manière détaillée les processus d'ionisation, nous discutons de la vitesse des électrons et des ions dans le gaz, ainsi que du processus d'avalanche. Nous discutons également du choix des gaz dans les détecteurs. Nous nous intéressons ensuite à la formation du signal et pour finir à la mesure de l'impulsion d'une particule.
Au chapitre 3, nous décrivons différents types de TPC de la nouvelle génération. Ensuite, nous présentons quelques exemples de TPC actuellement utilisées dans des expériences de physique des particules et pour finir nous discutons des paramètres et des performances attendus pour les futures grandes TPC.
Au chapitre 4, nous décrivons le dispositif expérimental et le prototype en lui-même. Nous y discutons également des premières analyses effectuées sur les données brutes, de la mesure de la vitesse de dérive des électrons, et de la sélection de traces que nous avons réalisée.
Le chapitre 5 est dédié à la méthode d'ajustement de trace par filtre de Kalman. Nous commençons par développer les équations du filtre dans un cadre général, pour ensuite les appliquer au cas de la reconstruction de traces. Nous discutons de l'implémentation du filtre et décrivons les premiers tests avec des données simulées. Nous comparons également les résultats avec ceux obtenus par la méthode des moindres carrés.
Le filtre de Kalman est ensuite appliqué sur des données réelles. les performances en terme de biais et de résolution sont discutées en fonction de la distance de dérive. Pour terminer, nous extrayons de nos mesures la résolution ultime du prototype.

# Chapitre 2

# Principe des détecteurs à gaz

## 2.1 Introduction

Les expériences de physique des particules installées auprès des accélérateurs sont généralement composées d'un détecteur dédié à la reconstruction de la trajectoire des particules chargées, le trajectographe, entouré par un système dédié à la mesure de l'énergie des particules, les calorimètres (électromagnétique ou hadronique). Le trajectographe a donc pour but principal la reconstruction de la trajectoire des particules chargées qui le traversent et d'en mesurer l'impulsion avec précision, tout en minimisant l'influence de la mesure sur l'impulsion et l'énergie de ces particules, pour ne pas altérer les mesures des calorimètres. Pour réduire l'influence du trajectographe sur les mesures, il faut donc minimiser la quantité de matière de celui-ci, tout en ayant suffisamment de points de mesure pour reconstruire la trace avec la meilleure précision possible. Cela explique l'intérêt de construire des trajectographes avec des détecteurs à gaz. En effet, les détecteurs à gaz permettent d'avoir un grand volume de détection pour peu de matière d'interaction.

Les détecteurs à gaz ont fait leur apparition au début du XX$^{ie}$ siècle, mais ils étaient surtout utilisés pour la détection de radiations. Le plus célèbre de ces détecteurs à radiations est probablement le compteur Geiger-Müller (inventé par H. Geiger en 1913 et mis au point en collaboration avec W. Müller 15 ans plus tard en 1928). A cette époque, on trouvait aussi des chambres à ionisation ainsi que des chambres proportionnelles. Ces détecteurs n'étaient pas, ou pas beaucoup, utilisés en physique des hautes énergies, car on leur préférait les compteurs à scintillation dont la réponse temporelle est bien meilleure. Il faut attendre la fin des années 70 et l'invention de G. Charpak pour voir apparaître au premier plan les détecteurs à gaz en physique des particules. C'est en 1968 que G. Charpak développe sa chambre

proportionnelle multifilaire (MWPC). Il obtiendra le prix Nobel en 1992 pour cette même invention.

Dans ce chapitre nous allons discuter des principes physiques qui entrent en jeu pour observer le passage des particules chargées dans un détecteur à gaz. Nous commencerons par discuter du principe général de détection, nous verrons ensuite, de manière plus précise, l'ionisation et la dérive des électrons-ions dans le gaz. Nous nous intéresserons, pour suivre, au processus d'avalanche électronique ainsi qu'à la formation du signal. Et pour finir ce chapitre, nous discuterons du calcul d'impulsion de la particule détectée.

## 2.2 Principe général d'une chambre à projection temporelle (TPC)

Pour illustrer le principe des détecteurs à gaz, nous allons brièvement décrire le fonctionnement d'une chambre multifils, dont une coupe transverse est représentée à la Fig. 2.1 (gauche).
Une chambre multifils est composée de fils tendus entre 2 électrodes planes parallèles qui délimitent le volume sensible du détecteur, rempli d'un mélange gazeux.
Les fils sont généralement connectés à la masse, via l'électronique de lecture, alors que les électrodes planes sont généralement polarisées positivement. Cette géométrie a pour conséquence la création d'un champ électrique uniforme et constant dans le volume sensible sauf au voisinage des fils, comme l'indiquent les lignes d'équipotentiel de la Fig. 2.1 (droite).

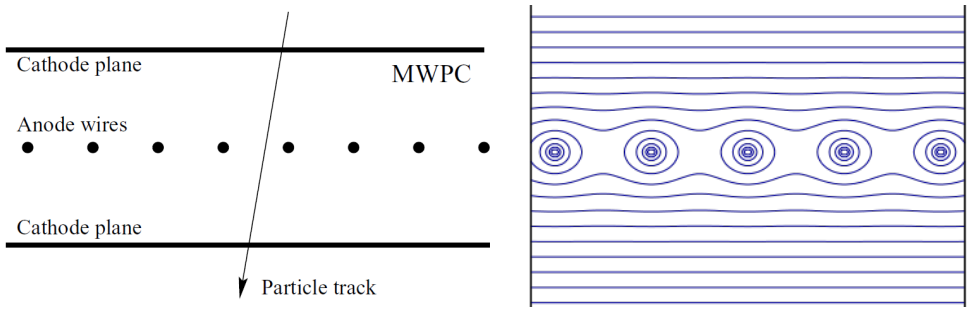


FIGURE 2.1 – À gauche vue schématique d'une MWPC ; à droite les lignes d'équipotentiel dans une MWPC.

Lorsqu'une particule chargée traverse le volume de gaz du détecteur, elle va ioniser ce gaz tout au long de sa trajectoire. Le champ électrique uniforme a pour effet de faire dériver les ions et les électrons respectivement vers les cathodes planes

et les fils anodiques. Le mouvement des charges va induire un courant électrique sur les électrodes, ce qui constitue le signal. Il est à noter que l'ionisation ne va pas, en général, créer suffisamment de paires électrons-ions pour que le signal soit détectable par l'électronique. Il faut donc un processus d'amplification dans le détecteur même afin de rendre le signal détectable : c'est le processus d'avalanche.

La TPC, illustrée à la Fig. 2.2, est un type de détecteur à gaz dont la particularité est que le système de lecture, composé par exemple d'une MWPC pour produire l'avalanche, se trouve uniquement à une extrémité du volume de gaz, ce qui permet de couvrir un plus grand volume de détection tout en minimisant la quantité de matière due au système de lecture. La dérive des électrons d'ionisation vers le plan de lecture segmenté permet une mesure de la trajectoire projeté dans ce plan. L'autre avantage d'une TPC est de pouvoir mesurer la troisième dimension ; celle-ci est obtenue à partir du temps de dérive des électrons dans le gaz. En effet, la vitesse de dérive étant connue (voir paragraphe 2.4), il suffit de mesurer le temps que les électrons mettent pour arriver jusqu'à l'anode pour avoir cette troisième dimension.

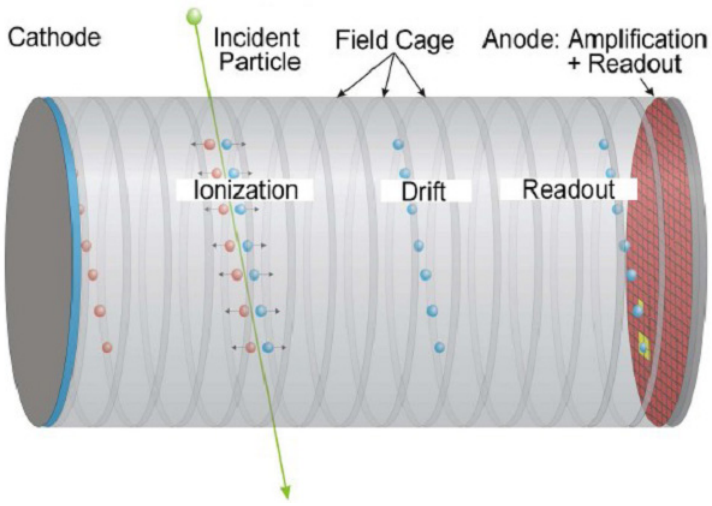


FIGURE 2.2 – Schéma du principe de fonctionnement d'une TPC.

Nous allons maintenant détailler, de manière plus précise, toutes les étapes citées ci-dessus.

## 2.3 Ionisation

### 2.3.1 Perte d'énergie dans le gaz

Une particule chargée relativiste traversant un volume de gaz, ou de manière plus générale un matériau, va interagir avec ce dernier, et donc perdre de l'énergie tout au long de sa trajectoire. La particule peut interagir de plusieurs manières différentes. Selon son type, la particule incidente peut interagir par interaction faible, interaction forte, ou interaction électromagnétique. Dans les détecteurs à gaz l'interaction dominante est l'interaction électromagnétique.

Il y a aussi plusieurs types d'interactions électromagnétiques possibles, comme par exemple le rayonnement Cherenkov, le Bremsstrahlung, etc... Mais la seule qui est dominante dans notre cas est l'interaction Coulombienne qui va avoir pour effet une excitation et/ou une ionisation des molécules de gaz.

Le taux moyen de perte d'énergie par unité de longueur d'une particule chargée relativiste est décrit par l'équation de Bethe-Bloch [1] :

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] \tag{2.1}$$

$$K = 4\pi N_a r_e^2 m_e c^2$$

où $T_{max}$ est l'énergie cinétique maximum qui peut être donnée à un électron libre lors d'une seule collision, $m_e$ est la masse de l'électron, $\beta$ est la vitesse de la particule divisée par la vitesse de la lumière ($\beta = v/c$), $\gamma$ le facteur de Lorentz ($\gamma = (1-\beta)^{-1/2}$), $I$ l'énergie d'excitation moyenne, $A$ et $Z$ le nombre de masse et le nombre atomique du matériau, $N_a$ le nombre d'Avogadro, et $r_e$ le rayon classique de l'électron défini comme $r_e \equiv e^2/\pi\epsilon_0 m_e c^2$.

La fonction de Bethe-Bloch est représentée à la Fig. 2.3 pour différents matériaux. Il est important de remarquer que la perte différentielle d'énergie ne dépend pas de la masse de la particule, mais seulement de sa vitesse et de sa charge.
A basse énergie ($\beta < 1.0$) on peut observer une rapide décroissance de la perte d'énergie, due au terme en $1/\beta^2$, jusqu'à atteindre un minimum à $3 \leqslant \beta\gamma \leqslant 4$.
Aux énergies relativistes ($\beta \simeq 1$, $\gamma \gg 1$), la perte d'énergie, dominée par le terme en $\ln\gamma$, augmente de manière logarithmique, c'est la remontée relativiste, jusqu'à atteindre une valeur constante appelé plateau de Fermi.
Le ralentissement de la remontée relativiste est due au terme $\delta(\beta\gamma)$ qui est appelé

correction de densité. Il apparaît lorsque la particule a une vitesse ultra-relativiste. En effet, à ces vitesses une polarisation temporaire des atomes du milieu va écranter le champ électrique des atomes le long de la trajectoire, et diminuer les interactions entre ces atomes et la particule incidente.

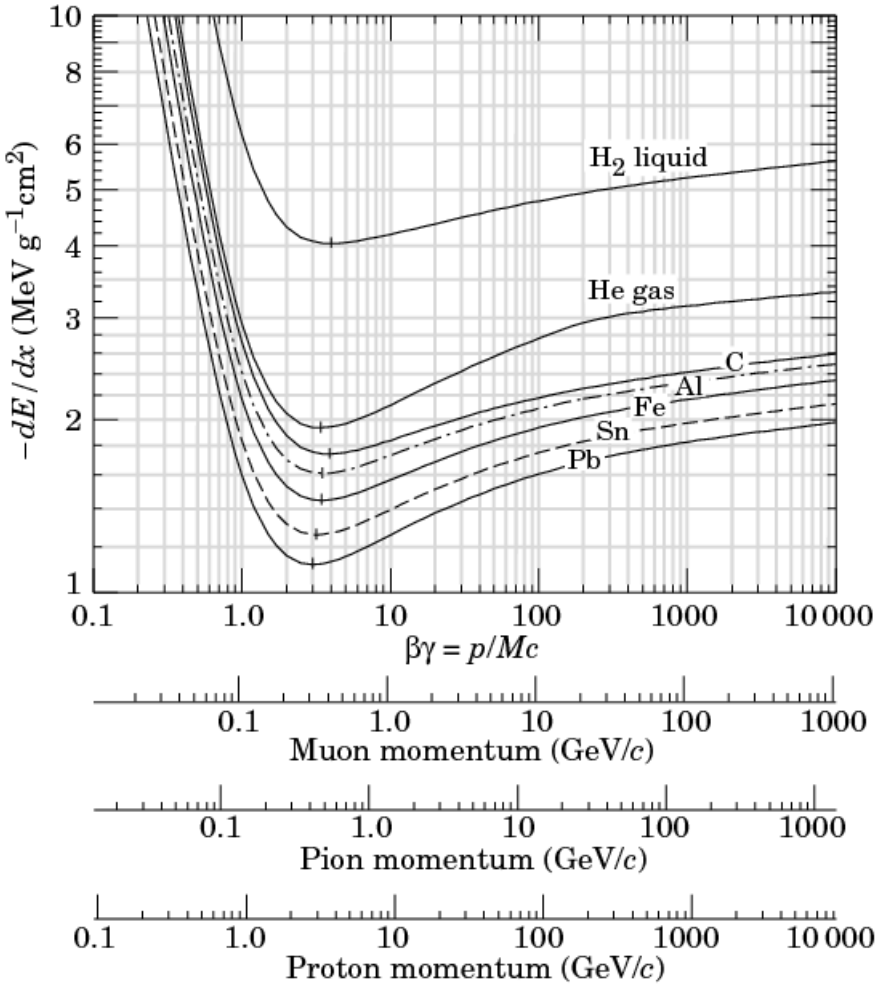


FIGURE 2.3 – Perte d'énergie moyenne par unité de longueur en fonction de l'impulsion de diverses particules dans l'hydrogène liquide, l'hélium gazeux, le carbone, l'aluminium, le fer, l'étain et le plomb [1].

### 2.3.2 Ionisation primaire et totale

La particule incidente va donc, comme nous venons de le voir, créer des paires d'électrons et d'ions tout le long de la trajectoire par interaction électromagnétique.

Ce mécanisme est appelé ionisation primaire. Si les électrons ainsi produits ont une énergie supérieure au potentiel d'ionisation du milieu, il est possible qu'ils ionisent à leur tour d'autres molécules de gaz, c'est l'ionisation secondaire. La somme de l'ionisation primaire et secondaire est appelée ionisation totale

En fait, seulement une certaine fraction de l'énergie perdue par la particule incidente est utilisée pour l'ionisation. Si l'on définit $W$ l'énergie moyenne nécessaire pour créer une paire électron-ion, nous pouvons écrire une relation qui nous donne le nombre total moyen de paires produites le long de la trajectoire $\langle N \rangle$ :

$$W \langle N \rangle = L \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$$

où $L$ est la longueur de la trajectoire. L'énergie qu'il faut pour créer une paire dépend bien évidemment du type de gaz utilisé et est déterminée expérimentalement.
En repartant de la relation ci-dessus, il est facile d'exprimer le nombre moyen de paires créées par unité de longueur ($n_T$) :

$$n_T = \frac{\langle dE/dx \rangle}{W}$$

Dans la plupart des détecteurs à gaz on utilise un mélange gazeux. Dans ce cas, le nombre total d'électrons est obtenu en effectuant la somme du nombre moyen d'électrons produits dans chacun des gaz du mélange, pondérée par le pourcentage $P_i$ de gaz dans le mélange :

$$n_T = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_i \frac{P_i}{W_i}$$

où l'indice $i$ représente un gaz parmi $n$.
Les valeurs de $W_i$ , $dE/dx$ et $n_T$ pour différents gaz sont reprises à la table 2.1, ces valeurs sont les valeurs moyennes obtenues de manière expérimentale.

### 2.3.3 Collisions ionisantes

Lorsque une particule chargée traverse un volume de gaz, elle entre en collision avec un grand nombre de molécules du gaz, mais peu de ces collisions produisent une ionisation. La loi de probabilité que va suivre cette ionisation sera donc par conséquent une loi de Poisson.
Si l'on a $n$ collisions sur une certaine distance de parcours, la probabilité de créer $k$

| | $W_i$ (eV) | $dE/dx$ (MeV/g cm$^2$) | $n_T$ ($e^-/cm$) |
|---|---|---|---|
| He | 41 | 1.94 | 7.8 |
| Ne | 36 | 1.68 | 39 |
| Ar | 26 | 1.47 | 94 |
| Kr | 24 | 1.32 | 192 |
| Xe | 22 | 1.23 | 307 |
| $Co_2$ | 33 | 1.62 | 91 |
| $CH_4$ | 28 | 2.21 | 53 |
| $C_4H_{10}$ | 23 | 1.86 | 195 |

TABLE 2.1 – Table des valeurs de $W_i$ , $dE/dx$ et $n_T$ pour différents gaz [2].

électrons primaires sera donnée par :

$$P(k) = \frac{n^k}{k!}e^{-n}$$

Par conséquent, l'inefficacité minimum d'un détecteur parfait est donnée par :

$$P(k=0) = e^{-n}$$

c'est à dire la probabilité qu'il n'y ait pas d'ionisation primaire lors de la traversée du volume gazeux.

### 2.3.4 Diffusion multiple

Outre les collisions inélastiques avec les électrons atomiques, les particules chargées traversant de la matière vont également subir des interactions Coulombiennes élastiques avec les noyaux.
Après avoir subi un grand nombre de petites déviations successives, la particule va émerger sous un certain angle $\theta$ par rapport à la direction initiale de la particule. La distribution de cet angle de diffusion projeté dans un plan parallèle à la direction de la particule incidente est une gaussienne avec une déviation standard donnée par [1] :

$$\theta_0 = \frac{13.6MeV}{\beta cp} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln\left(\frac{x}{X_0}\right)\right]$$

où $\beta$, $p$ et $z$ sont respectivement la vitesse, l'impulsion et la charge de la particule incidente. $x$ et $X_0$ sont respectivement l'épaisseur et la longueur de radiation du matériau traversé.

## 2.4 Vitesse de dérive des électrons et des ions dans un gaz

Les performances d'un détecteur à gaz dépendent de la dérive et de la diffusion des électrons et des ions dans ce gaz. La vitesse de dérive détermine le temps de collection de l'ionisation, et par conséquent, la rapidité du temps de réponse du détecteur. La diffusion est responsable de l'élargissement de la distribution de la charge dans le gaz, ce qui affecte la détermination de la position de la particule incidente. Avant de discuter du choix du mélange gazeux et de ses influences sur les performances du détecteur, nous allons introduire certains principes théoriques.

### 2.4.1 Cinétique des gaz sans champ extérieur

Dans un gaz, en l'absence de champ extérieur, la dynamique des molécules de gaz, ainsi que celle des ions et des électrons libres en équilibre dans le gaz, est décrite par la cinétique des gaz.
Cette théorie nous dit que les particules d'un gaz sont soumises à l'agitation thermique. Cette agitation confère une certaine énergie cinétique. La distribution d'énergie cinétique dans un gaz est donnée par la distribution de Maxwell [3] :

$$P(E)dE = N\frac{2}{\sqrt{\pi}\left(k_B T\right)^{3/2}}\sqrt{E}\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)dE$$

où $T$ est la température absolue, $N$ le nombre de molécules dans le gaz, et $k_B$ la constante de Boltzman.
A partir de cette distribution, la distribution des vitesses peut facilement être calculée :

$$P(v)dv = N\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2}v^2\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)dv$$

L'énergie moyenne d'une molécule de gaz, dans les conditions normales ne dépend que de la température et vaut $3/2k_B T$, soit $0.04eV$ à $293K$. A cette énergie correspond une vitesse moyenne :

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \tag{2.2}$$

où $m$ est la masse de la particule.
Par conséquent les électrons se déplacent beaucoup plus rapidement que les ions.

D'après l'Eq.(2.2), la vitesse des électrons et des ions est de 10 $cm/\mu s$ et $10^{-2} cm/\mu s$ respectivement.

Ainsi, en l'absence de tout autre effet, une distribution de charges, initialement localisées en un point, diffuse au cours du temps par collisions multiples et suivant une gaussienne :

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx$$

où $dN/N$ est la fraction de charges situées à une distance comprise entre $x$ et $x + dx$ du point initial, à l'instant $t$ ; $D$ est le coefficient de diffusion. Le coefficient de diffusion étant proportionnel à la vitesse moyenne $v$, il diminue avec la masse des particules.
Pour une diffusion à une dimension, la déviation standard est donnée par :

$$\sigma_x = \sqrt{2Dt} \tag{2.3}$$

Il est facile de généraliser cette expression au cas de la diffusion dans un volume. Dans ce cas la déviation standard est donnée par :

$$\sigma = \sqrt{6Dt}$$

### 2.4.2 Dérive et diffusion en présence de champs extérieurs : modèle macroscopique

Lorsqu'un champ électrique uniforme est appliqué, les électrons et les ions vont être accélérés le long des lignes de champ. Cette accélération est interrompue par des collisions avec les molécules de gaz, ce qui va limiter la vitesse moyenne maximale des électrons et des ions.

Le mouvement d'une particule chargée (électron ou ion) dans un gaz sous l'effet d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$, peut être décrit par l'équation du mouvement avec friction [4]. La friction étant causée ici par les collisions entre la particule et les molécules de gaz. Il est alors possible de définir la vitesse de dérive ($\vec{v}_d$) comme étant la vitesse moyenne de toutes les particules chargées. Après un temps suffisamment long, la force de friction qui augmente avec la vitesse de dérive va compenser la force électromagnétique, ce qui va avoir pour conséquence d'atteindre une vitesse de dérive $\vec{v}_d$ constante. En l'absence de champ magnétique,

la vitesse de dérive s'exprime alors comme :

$$\vec{v}_d = \frac{q}{m}\tau\vec{E} \tag{2.4}$$

où $q$ et $m$ sont respectivement la charge et la masse de la particule, et $\vec{E}$ le champ électrique et $\tau$ le temps de libre parcours moyen, c'est à dire le temps moyen entre deux collisions.
En définissant la mobilité d'une charge dans un gaz $\mu \equiv (q/m)\tau$, l'Eq.(2.4) peut s'écrire :

$$\vec{v}_d = \mu\vec{E}$$

Ainsi la mobilité décrit les différences de vitesse que vont avoir différents types de particules dans un même champ électrique. La mobilité dépend donc de la charge de la particule, de sa masse, ainsi que du type de gaz dans lequel elle dérive (puisque $\tau$ dépend du gaz).
Dans le cas d'un mélange de $n$ gaz, la mobilité des ions dans ce mélange de gaz est donné par la loi de Blanc [5] :

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\mu_i}$$

où $c_i$ est la concentration du gaz $i$ et $\mu_i$ la mobilité de l'ion dans le gaz pur.

Notons encore que dans le cas où un champ magnétique est appliqué parallèlement au champ électrique, ni la vitesse de dérive ni la direction de la dérive ne sont affectées par la présence du champ magnétique. Ce n'est pas le cas pour la diffusion, comme nous le verrons plus loin.

### 2.4.3 Dérive et diffusion en présence de champs extérieurs : modèle microscopique

Comme nous l'avons vu à la section 2.4.1, lorsqu'aucun champ extérieur n'est appliqué, un électron (ou un ion) libre dans le gaz a une énergie cinétique égale à $3/2k_BT$ et une vitesse de dérive instantanée orientée aléatoirement. Sous l'effet d'un champ électrique, les électrons et les ions sont accélérés le long des lignes de champ et leur énergie cinétique moyenne augmente :

$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \epsilon_E + \frac{3}{2}k_BT$$

où $\epsilon_E$ est l'énergie moyenne acquise à cause du champ électrique. Aux valeurs de champs typiquement utilisées dans les détecteurs à gaz, supérieurs à quelques centaines de $V/cm$, $\epsilon_E$ vaut quelques électron-volts. Par conséquent la contribution de l'énergie thermique, $\sim 0.04\ eV$, peut être négligée.

A chaque collision, la particule chargée perd une fraction $\lambda(\epsilon)$ de son énergie $\epsilon_E$. Par conséquent il y a une balance entre l'énergie reçue du champ électrique et l'énergie perdue par collision. Ceci permet d'exprimer la vitesse de dérive de la façon suivante [6] :

$$\vec{v_d} = \frac{q\vec{E}}{mN\sigma(\epsilon)}\sqrt{\frac{\lambda(\epsilon)}{2}}$$

où $\sigma(\epsilon)$ est la section efficace de la diffusion élastique, et $N$ la densité moléculaire. $\sigma(\epsilon)$ et $\lambda(\epsilon)$ étant des fonctions de l'énergie cinétique $\epsilon$ ou de l'énergie caractéristique $\epsilon_k \equiv \frac{2}{3}\epsilon$, il faut observer leur évolution avec le champ électrique pour comprendre le comportement de la vitesse de dérive.
C'est ce qui est représenté aux Fig. 2.4 et 2.5 qui montrent respectivement l'énergie caractéristique en fonction du champ électrique, $\sigma$ et $\lambda$ en fonction de l'énergie cinétique, pour l'argon et le méthane.

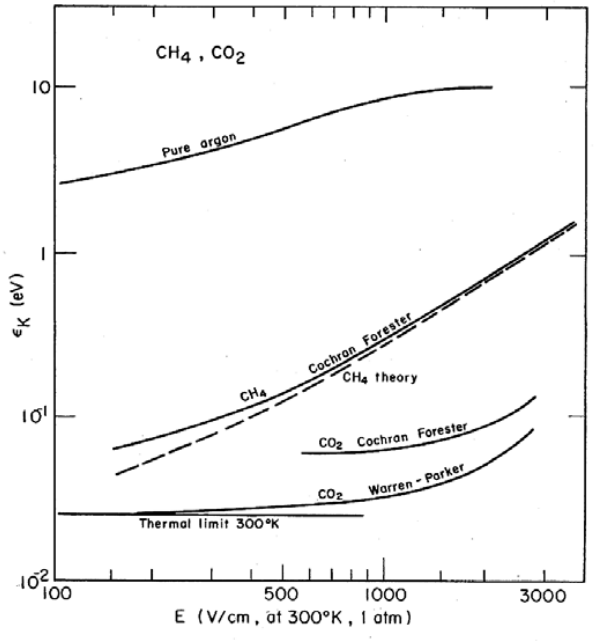


FIGURE 2.4 – Énergie caractéristique $\epsilon_k$ en fonction du champ électrique [7].

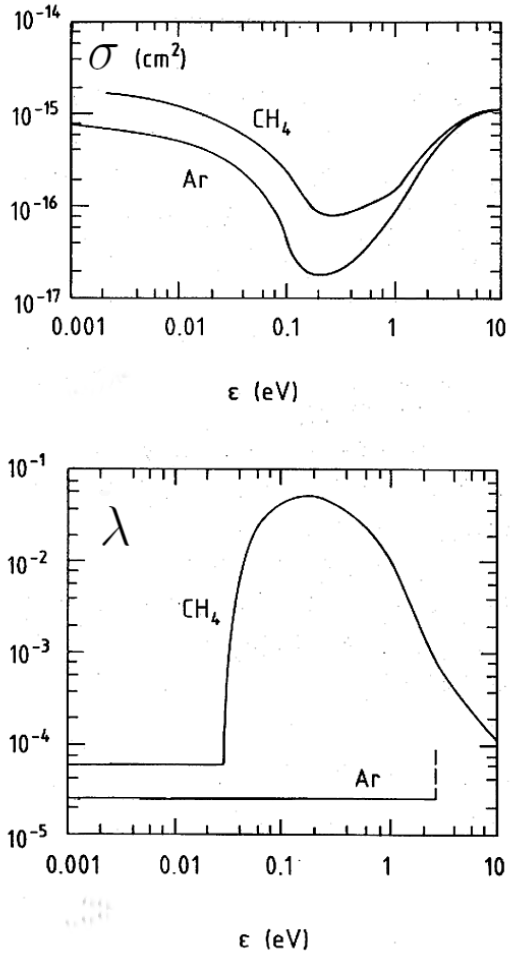


FIGURE 2.5 – Section efficace $\sigma$ et fraction de l'énergie perdue par collisions $\lambda$ en fonction de l'énergie cinétique pour l'argon et le méthane [6].

Dans l'argon pur, $\epsilon_k$ augmente lentement de $\sim 3$ à $10\ eV$ pour des champs électriques allant de 100 à 2000 $V/cm$. Dans ce domaine d'énergie, on observe à la Fig. 2.5 que la section efficace est proche du minimum, et vaut $10^{-15} cm^2$ et que la fraction de l'énergie perdue est constante et très petite, proche de $10^{-5}$. Cette petite valeur s'explique par le fait que dans les gaz nobles comme l'argon, en deçà d'un seuil d'excitation, typiquement de plusieurs électron-volts, les collisions ne peuvent être qu'élastiques. Par conséquent la vitesse de dérive sera petite.
Au contraire, dans un gaz de molécules poly-atomiques, comme le $CO_2$, le méthane, l'isobutane, etc..., les nombreux états de rotation et de vibration peuvent être excités lors des collisions, ce qui abaisse le seuil d'excitation à quelques dixièmes ou centièmes d'électron-volts (0.03 $eV$ pour la molécule $CH_4$). Ainsi les valeurs de $\lambda$ sont beaucoup plus grandes (foir Fig. 2.5 pour $CH_4$) comparées à l'argon. Par consé-

quent, ajouter même une petite quantité de gaz poly-atomique (comme par exemple du $CO_2$) à un gaz noble modifie drastiquement la vitesse de dérive comme le montre la Fig. 2.6.

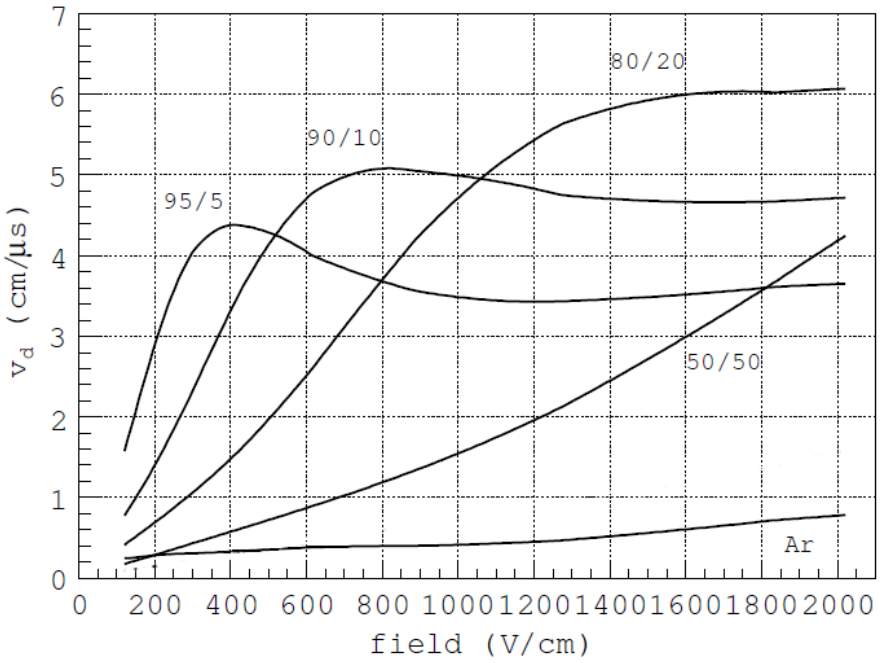


FIGURE 2.6 – Vitesse de dérive des électrons en fonction du champ électrique pour différents mélanges $Ar/CO_2$ calculée par simulation [3].

En ce qui concerne la diffusion, on peut montrer que la déviation standard dans la direction $x$ (voir Eq.(2.3)) peut être exprimée en terme de l'énergie moyenne des particules $\epsilon$, et de leur mobilité $\mu$ [6] :

$$\sigma_i^2 = 2\frac{2\epsilon\mu}{3q}t \tag{2.5}$$

où $\frac{2\epsilon\mu}{3q}$ peut être identifié au coefficient de diffusion $D$ de l'Eq.(2.3). Notons que le temps durant lequel les charges dérivent d'une distance $L$ est égal à $t = \frac{L}{\mu E}$, ce qui permet d'écrire l'Eq.(2.5) comme :

$$\sigma_i = D'\sqrt{L} \tag{2.6}$$

où $D'$ est le coefficient de diffusion qui est égal à :

$$D' = \sqrt{\frac{2D}{\mu E}} = \sqrt{\frac{4\epsilon}{3qE}} \tag{2.7}$$

Ainsi, la déviation standard de la distribution de charge est proportionnelle à la racine carrée de la distance de dérive.

La diffusion apporte une limite sur la précision de la mesure de la position et il est dès lors préférable d'avoir $\sigma_i$ le plus petit possible. D'après l'Eq.(2.7), ceci est atteint avec de petites énergies cinétiques à grand champs électriques. Ceci est plus facile à atteindre avec des gaz dits "froids" comme le méthane ou le $CO_2$ (voir Fig. 2.4). A la limite où $\epsilon = 3/2k_BT$, la diffusion est une fonction décroissante du champ électrique et ne dépend plus du gaz :

$$D = \sqrt{\frac{2k_BT}{qE}}$$

ce qui donne $D = 230$ et $70\ \mu m/\sqrt{cm}$ à, respectivement, $100\ V/cm$ et $1\ kV/cm$.
Lorsqu'un champ magnétique est aussi appliqué, les électrons suivent une trajectoire hélicoïdale dans la direction du champ magnétique, tout en dérivant dans la direction du champ électrique. On peut montrer [3] que dans ce cas la diffusion est réduite d'un facteur $\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}$ où $\omega \equiv (qB)/m$ est la fréquence cyclotron.
En général, dans une TPC, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont alignés et l'effet de la fréquence cyclotron est utilisé pour réduire la diffusion transverse.
Par exemple, la diffusion transverse est réduite d'un facteur $\sim 13$ pour un mélange gazeux $Ar/CH_4$ 95/5 à $100\ V/cm$ et avec un champ magnétique de $3\ T$ comme on peut le voir sur la Fig. 2.7.

### 2.4.4 Dérive des ions

A cause de leur grande masse, comparable à la masse des molécules de gaz, le comportement des ions diffère de celui des électrons. Dans un même champ électrique, les ions acquièrent sur un libre parcours moyen une énergie similaire à l'énergie qu'un électron pourrait acquérir dans les mêmes conditions, cependant, une grande fraction de cette énergie est perdue lors de la prochaine collision. Par conséquent l'énergie des ions varie peu, même avec des champs électriques de plusieurs centaines de Volts/$cm$. Ceci a pour conséquence que la diffusion des ions est typiquement deux ordres de grandeur plus petite que celle des électrons et que leur mobilité est de 3 à 4 ordres de grandeurs plus petite.

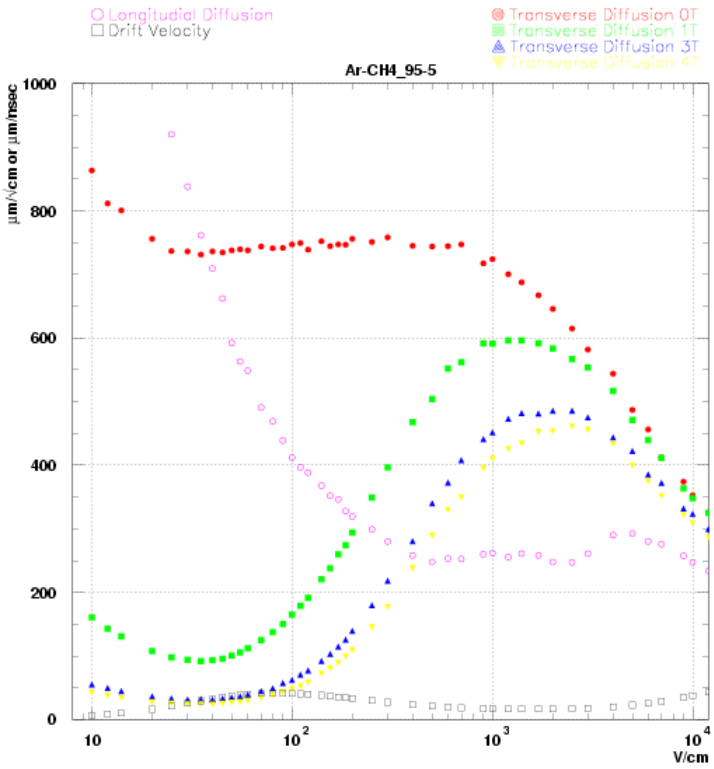


FIGURE 2.7 – Diffusion transverse et vitesse de dérive en fonction du champ électrique pour différents champs magnétiques [8].

## 2.5 Développement de l'avalanche

Lorsqu'un électron se déplace dans le gaz avec suffisamment d'énergie, il peut provoquer des collisions ionisantes (voir section 2.3). Or, si le champ électrique dépasse quelques kilovolts par centimètre, les électrons peuvent gagner suffisamment d'énergie entre deux collisions pour produire une excitation ou une ionisation des molécules de gaz. Il va donc y avoir création d'une paire électron-ion. L'électron ainsi produit va être, à son tour, accéléré et va donc pouvoir faire, lui aussi, des collisions ionisantes. Ce processus de multiplication s'appelle le processus d'avalanche. Nous allons maintenant décrire ce processus de manière un peu plus formelle.
Nous pouvons définir le libre parcours moyen d'ionisation des électrons, c'est à dire la distance moyenne que doit parcourir un électron avant de subir une collision ionisante avec une molécule de gaz. Cette distance va dépendre de la section efficace d'ionisation $\sigma(\epsilon)$, qui dépend elle-même de l'énergie ($\epsilon$) qu'il faut pour créer une paire. La distance dépend aussi du nombre de molécules dans le gaz ($n$). Ce qui

amène à l'expression suivante pour le libre parcours moyen d'ionisation :

$$\lambda(\epsilon) = (n\sigma(\epsilon))^{-1}$$

L'inverse de cette distance représente le nombre de paires électron-ion produites par unité de longueur. Ce nombre est appelé le coefficient de Townsend ($\alpha(\epsilon)$) [9].
Maintenant que nous avons défini ce coefficient, il nous faut exprimer l'augmentation du nombre d'électrons dans une avalanche.
Dans le cas d'un champ électrique constant, un électron va donc ioniser une molécule de gaz après un parcours moyen de $\alpha^{-1}$, il y a donc, à ce moment là, deux électrons et un ion. Les deux électrons, après un parcours moyen de nouveau égal à $\alpha^{-1}$, vont ioniser deux molécules de gaz. Et le processus va se répéter. Sur une distance $dx$ nous avons donc une augmentation du nombre d'électrons égal à $n$ fois le coefficient de Townsend :

$$\frac{dn}{dx} = n\alpha$$

Si nous intégrons cette relation, cela nous donne le nombre d'électrons produits dans une avalanche après une distance $x$ :

$$n = n_0 e^{\alpha x}$$

où $n_0$ est le nombre d'électrons au départ de l'avalanche.
Nous pouvons à présent définir le gain :

$$G(\Delta x) = \frac{n}{n_0} = e^{\alpha \Delta x}$$

qui décrit le facteur multiplicatif de l'avalanche.
L'avalanche, qui est donc un ensemble d'électrons et d'ions, va prendre la forme d'une goutte, comme illustré à la Fig. 2.8. En effet la différence de vitesse de dérive entre électron et ion (qui est de l'ordre de $10^3$) va avoir pour conséquence une accumulation des électrons à l'avant de l'avalanche, alors que les ions vont se répartir tout le long de l'avalanche ce qui va constituer une queue.

A priori, au vu de la description du gain, rien ne limite la multiplication. Or il y a bien évidemment une limite au gain. En effet, la taille de l'avalanche va croître avec la distance. Le champ électrique produit par cette charge d'espace va donc lui aussi croître jusqu'à annuler localement le champ électrique extérieur. Cet effet aura pour conséquence de favoriser les recombinaisons électrons-ions qui vont émettre des photons ultra-violets de manière isotrope dans tout le détecteur. Ces photons peuvent eux aussi ioniser les molécules de gaz qui vont créer de nouvelles avalanches.

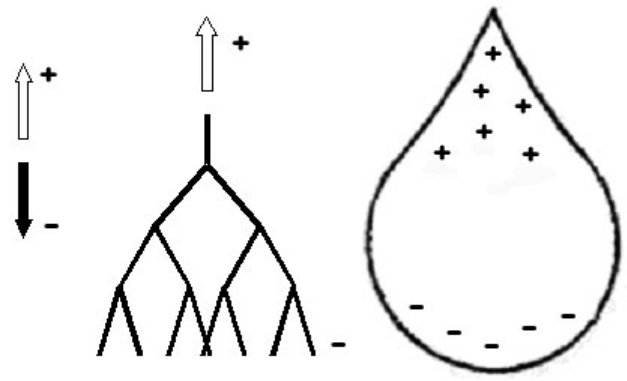

FIGURE 2.8 – Schéma du développement de l'avalanche.

Toutes ces avalanches peuvent se combiner les unes aux autres et connecter les électrodes par un plasma conducteur, ce qui va produire une décharge, qui risque d'endommager les électrodes.
Une limite empirique du nombre de charges maximum dans une avalanche a été déterminée par Raether [9] et correspond à :

$$\alpha s \sim 20$$

où $s$ est la dimension caractéristique de l'avalanche. Cette limite correspond à un gain de l'ordre de $10^8$.

## 2.6 Gaz de remplissage

Le choix du gaz à utiliser est quelque chose d'assez compliqué, et dépend des performances attendues du détecteur. Les paramètres dont il faut tenir compte pour choisir un gaz (ou un mélange de gaz) sont : la vitesse de dérive des électrons et des ions dans ce gaz, le gain de ce gaz et la capacité à absorber les photons ultra-violets (et donc minimiser les décharges).
Le choix de l'argon est assez classique, car l'ionisation primaire pour des particules au minimum d'ionisation est assez haute (de l'ordre de 100 $e^-/cm$ voir la table 2.1). Et l'avantage de l'argon face au xénon et au krypton est son prix d'achat.
Il arrive fréquemment que le détecteur fonctionner à un gain élevé de plusieurs milliers, c'est à dire avec un champ électrique élevé, ce qui favorise les décharges. Pour pouvoir accroître le champ électrique tout en évitant les décharges, il faut utiliser un gaz poly-atomique. En effet, les gaz poly-atomiques ont comme propriété

d'avoir un grand nombre de degrés de liberté (rotation, vibration...). Ils peuvent donc absorber les photons ultra-violets produits dans les avalanches, et donc éviter les décharges. Ce type de gaz est appelé un *quencher*. En général les gaz utilisés comme quencher sont le $CO_2$, le $CH_4$ ou encore l'isobutane.

## 2.7 Formation du signal

Le signal que l'on observe sur l'électrode n'est pas, contrairement à ce que l'on pourrait croire, la collection des charges proprement dites. En effet, le temps de collection est beaucoup trop court pour qu'il y ait un courant détectable sur l'électrode. Le signal, qui est enregistré par l'électrode, est en réalité le courant induit par le mouvement des charges se déplaçant à proximité de cette dernière.
Pour comprendre le signal observé, nous allons commencer par étudier le cas d'une charge en mouvement à proximité d'une électrode non-segmentée, nous regarderons ensuite le même cas, mais pour une électrode segmentée. Enfin, nous finirons cette section par le calcul du signal des courants induits par une charge en mouvement au voisinage de $n$ électrodes.

### 2.7.1 Électrode non-segmentée

Si l'on a une charge $q$ à une certaine distance $Z_0$ d'une électrode mise à la terre, nous pouvons calculer la distribution de charge sur cette électrode par la méthode des images. Pour ce faire, une charge virtuelle $-q$ est placée de l'autre côté de l'électrode. La somme des potentiels des deux charges donne le potentiel total. A partir de ce potentiel, le champ électrique et la distribution de charge sur l'électrode deviennent :

$$\begin{aligned} E_z(x,y) &= -\frac{qZ_0}{2\pi(x^2+y^2+Z_0^2)^{3/2}} \\ E_x &= E_y = 0 \\ \sigma(x,y) &= \epsilon_0 E_z(x,y) \end{aligned}$$

Grâce à la distribution de charge nous pouvons calculer la charge totale induite sur l'électrode. Cette charge est bien évidement $-q$ c'est à dire la charge image.
Si l'on change la position initiale de la charge, cela va changer la distribution de charge, mais pas la charge induite en elle même. Il n'y aura donc aucun courant

induit par le mouvement d'une charge à proximité d'une électrode non-segmentée.

### 2.7.2 Électrode segmentée

Nous allons regarder maintenant ce qui se passe si nous divisons l'électrode en $N$ parties de largeur $L$. Lorsque la charge $q$ se déplace, la distribution de charge sur les portions d'électrode va à présent varier, ce qui va produire un courant.
Pour calculer la charge induite à l'instant $t$ sur la portion $i$, il faut intégrer la distribution de charge sur cette portion :

$$\begin{aligned} Q_i\left(Z_0(t)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-L/2}^{L/2}\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{2q}{\pi}\arctan\left(\frac{L}{2Z_0(t)}\right) \end{aligned}$$

où $Z_0(t)$ est la position de la charge en fonction de sa vitesse ($Z_0(t) = Z_0 + vt$).
Pour avoir le courant induit sur la portion considérée il reste donc à regarder l'évolution temporelle de la charge. Le courant induit par le mouvement d'une charge $q$ sur la portion $i$ d'une électrode segmentée sera donc donné par l'expression suivante :

$$I_i(t) = \frac{4qL}{\pi(4Z_0(t)^2 + L^2)}v$$

### 2.7.3 Courants induits

Nous allons maintenant étudier le signal qui va être induit par le mouvement d'une charge sur une électrode parmi un ensemble. Toutes les électrodes sont reliées entre elles et connectées à la masse avec une certaine impédance. Nous avons donc un ensemble de $n$ électrodes à la masse, et le courant induit sur l'électrode $i$ par une charge $q$ en mouvement sera noté $I_i(t)$. Cette configuration est, en fait, le problème pratique qu'il faut résoudre dans le cas d'un détecteur à gaz avec de multiples électrodes.
Pour calculer le courant induit, nous allons devoir utiliser deux théorèmes que l'on appelle théorèmes du signal.

Le premier est le théorème de réciprocité (ou théorème de Green). Ce théorème dit que si l'on a $n$ potentiels $V_i$ pour $i = 1, ..., n$ dus à $n$ charges $Q_i$, et $n$ autres

potentiels $\hat{V}_i$ dus à une autre distribution de charges $\hat{Q}_i$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \hat{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{Q}_i V_i$$

Le second est le théorème de Schockley-Ramo. Ce théorème dit que pour calculer le courant $I_i$, induit par le mouvement d'une charge $q$, sur une électrode $i$ parmi $n$ et reliée à la masse, il suffit de calculer le courant résultant sur cette électrode lorsqu'elle est maintenue au potentiel $V_0$ (en l'absence de la charge $q$ et toutes les autres électrodes étant maintenue à la masse).
En tout point il résulte donc un potentiel $V_i$ et un champ électrique $\vec{E}_i$.
Nous pouvons définir ce qu'on appelle le potentiel normalisé, ainsi que le champ normalisé (respectivement $V_w$ et $\vec{E}_w$) comme suit :

$$V_w \equiv \frac{V_i}{V_0}$$

$$\vec{E}_w \equiv \frac{\vec{E}_i}{V_0}$$

En utilisant ces deux définitions, ainsi que les deux théorèmes du signal, il est facile de montrer que le courant induit sur l'électrode $i$ est de la forme :

$$I_i = -q\vec{E}_w.\vec{v}$$

En pratique, le calcul du courant induit sur l'électrode $i$, requiert :
- le calcul du champ électrique dans le détecteur, créé par toutes les électrodes mises à leur potentiel de fonctionnement
- le calcul du champ normalisé ($\vec{E}_w$)
- le calcul de la position et de la vitesse de dérive de la charge $q$.

Les champs sont généralement calculées à l'aide de programme commerciaux [10]. Le mouvement de la charge $q$ peut être calculé en connaissant la vitesse de dérive et l'intensité du champ électrique dans le détecteur à gaz.

## 2.8 Mesure de l'impulsion d'une particule

Un des objectifs principaux d'un trajectographe est de mesurer l'impulsion des particules chargées le traversant.
Pour mesurer l'impulsion et déterminer la charge des particules, le trajectographe doit baigner dans un champ magnétique. En effet, la trajectoire d'une particule

chargée dans un champ magnétique est incurvée perpendiculairement à celui-ci. La force qui agit sur ces particules est appelée force de Lorentz :

$$\vec{F_L} = q\vec{v_T} \times \vec{B} = \frac{d\vec{P_T}}{dt}$$

où $\vec{P_T}$ est l'impulsion transverse de la particule.
Cette trajectoire, qui est une hélice, projetée dans le plan transverse est un segment de cercle de rayon :

$$R = \frac{P_T}{qB} \tag{2.8}$$

Ce qui permet de réexprimer l'impulsion transverse dans des unités plus appropriées à la physique des particules comme :

$$P_T = 0.3BR \tag{2.9}$$

où le champ magnétique est exprimé en Tesla, le rayon en mètre, ce qui nous donne donc l'impulsion transverse en $GeV/c$.
De manière générale, nous n'avons pas accès directement au rayon de courbure, mais plutôt à la sagita (voir Fig. 2.9). Il faut donc exprimer le rayon en fonction de la sagita ainsi que la longueur transverse $L_T$.

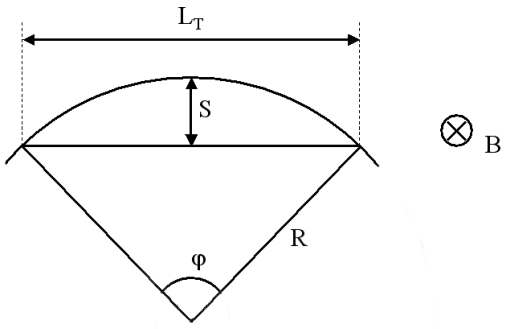


FIGURE 2.9 – Définition de la sagita.

En utilisant la relation de Pythagore, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\left(\frac{L_T}{2}\right)^2 + (R-s)^2 = R^2$$

comme, en général, la sagita est beaucoup plus petite que la longueur transverse ainsi que le rayon, nous pouvons négliger le terme qui contient le carré de la sagita.

Nous pouvons, donc, réécrire le rayon comme :

$$R \simeq \frac{L_T^2}{8s}$$

Ce qui permet de réécrire l'impulsion transverse (Eq.(2.9)), non plus en fonction du rayon, mais en fonction de la sagita :

$$P_T \simeq \frac{0.3}{8} \frac{BL_T^2}{s} \tag{2.10}$$

Si l'impulsion de la particule a une composante longitudinale ($P_z$), alors l'impulsion totale sera obtenue à l'aide de l'impulsion transverse ainsi que l'angle polaire $\theta$, de la manière suivante :

$$P = P_T / \sin\theta \tag{2.11}$$

Si l'on veut déterminer la résolution en impulsion, il faut exprimer l'impulsion totale en fonction des paramètres que notre détecteur mesure. Pour cela, il suffit de reprendre l'équation de l'impulsion transverse Eq.(2.10) et d'injecter l'expression de l'impulsion totale Eq.(2.11)

$$P \simeq \frac{0.3}{8} \frac{BL_T^2}{s \sin\theta} \tag{2.12}$$

Si nous négligeons l'erreur sur le champ magnétique ainsi que sur la longueur transverse, l'erreur sur l'impulsion sera due à trois types d'incertitude : l'erreur sur la mesure de la sagita, sur la mesure de l'angle polaire, et l'erreur due à la diffusion multiple (voir section 2.3.4).
On peut montrer [11], en partant de la relation 2.12 et de la distribution gaussienne de l'angle à la sortie du détecteur [1], que l'erreur sur l'impulsion s'écrit comme :

$$\left|\frac{\sigma_p}{P}\right|^2 = \left[\frac{a_n P_T}{0.3BL_T^2}\right]^2 \sigma_x^2 + \left[\frac{0.06}{B\beta}\right]^2 \frac{x}{X_0 L_T \sin\theta}$$

où $\sigma_x$ est la résolution spatiale, $\beta$ est la vitesse de la particule incidente, $x$ est l'épaisseur du matériau traversé, $X_0$ la longueur de radiation de ce même matériau et avec :

$$a_n = \sqrt{\frac{720}{n+4}}$$

pour $n$ mesures régulières espacées (et $n > 10$)[12].

La première partie (le terme de gauche), appelée résolution intrinsèque, est due aux erreurs de mesures sur la position. En effet, faire une erreur de mesure sur la position amène une erreur sur la trace reconstruite, et donc sur la sagita ainsi que sur l'angle polaire.
La deuxième contribution à l'erreur sur l'impulsion est due à la diffusion multiple (terme de droite). Pendant que la particule, dont nous voulons reconstruire la trajectoire, traverse le détecteur, elle va subir de la diffusion multiple causée par les molécules de gaz. La particule ne suit donc pas une hélice parfaite. L'angle à la sortie du trajectographe n'est donc pas tout à fait celui prédit.
En conclusion, même pour un détecteur parfait (qui n'amène pas d'erreur sur la mesure) nous aurions quand même une certaine erreur sur l'impulsion, due à la contribution aléatoire au mouvement qu'est la diffusion multiple.

Si on néglige l'incertitude due à la diffusion multiple, on remarque qu'un grand nombre de mesures $n$ peut compenser une moins bonne résolution spatiale sur chaque mesure $\sigma_x$.
Ainsi une large TPC, de rayon $\sim$ 2 $m$, plongée dans un champ magnétique de 3.5 $T$, et fournissant de l'ordre de 200 points de mesure, requiert une résolution spatiale de l'ordre de 100 $\mu m$ pour atteindre une erreur sur l'impulsion de l'ordre de $10^{-4}$ $(GeV/c)^{-1}$.

# Chapitre 3

# Détecteur TPC à micro-structures

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons voir de manière détaillée les chambres à projection temporelle, et leurs structures d'amplification.

Les contraintes toujours plus importantes des expériences de physique des particules ont poussé les chercheurs à développer de nouvelles technologies comme alternatives aux MWPC. C'est à la fin des années 80 que la nouvelle génération de détecteurs à gaz voit le jour, avec l'invention des détecteurs à gaz à micropistes (MSGC). Ce sont ses deux alternatives, les GEM et les Micromegas, que nous développerons plus en détails dans ce chapitre après avoir expliqué le principe des MSGC.

Comme nous avons vu au chapitre précédent, pour que le signal soit détectable dans une TPC, il faut augmenter le nombre d'électrons qui arrivent au niveau des anodes, afin que le courant induit sur celle-ci soit détectable par l'électronique. Cette opération se fait dans le volume de gaz, mais suffisamment proche des anodes, pour minimiser les effets de diffusion qui détérioreraient la résolution.
Jusqu'à présent, c'était des fils tendus comme dans une MWPC qui produisaient l'avalanche, ce qui induisait un courant sur l'anode segmentée proche des fils. Depuis peu la tendance est de remplacer les fils par une micro-structure, de type GEM ou Micromegas, couplée à un plan d'anodes finement segmenté.

Nous commencerons donc ce chapitre par expliquer le fonctionnement des MSGC. Nous décrirons ensuite les deux alternatives qui ont été inventées pour remédier au problème de décharge mis en évidence dans les MSGC : les GEM et les Micromegas. Nous développerons de manière approfondie le fonctionnement et les caractéristiques

de la technologie Micromegas, dans la mesure où le travail effectué lors de ce mémoire portait sur l'analyse des données enregistrées par un grand prototype de TPC équipé de Micromegas.

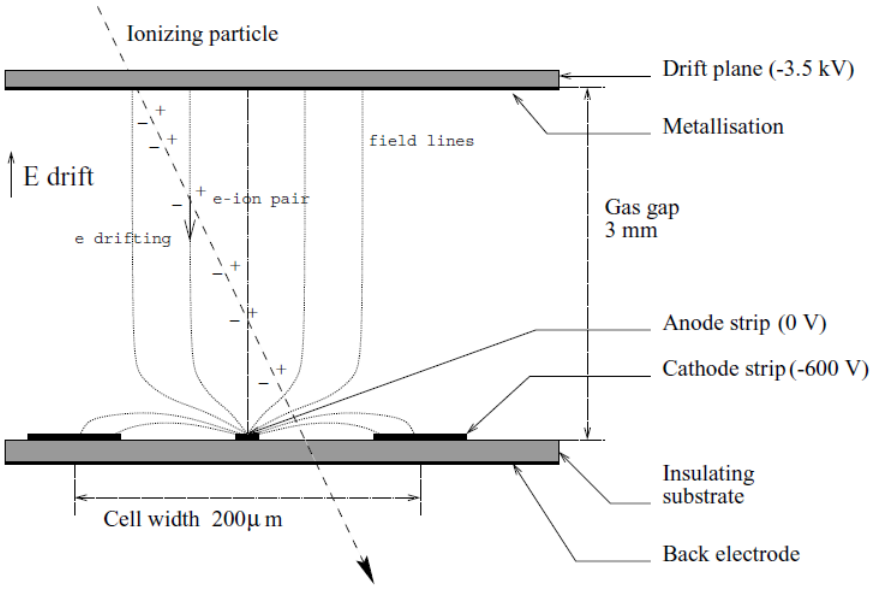


FIGURE 3.1 – Schéma du principe de fonctionnement d'une MSGC.

## 3.2 Détecteur à gaz à micropistes (MSGC)

C'est en 1988, à l'institut Laue-Langevin (à Grenoble) que Anton Oed a introduit le concept des MSGC [13]. Ce concept à été développé comme une alternative aux chambres proportionnelles multifilaires (MWPC) inventées par G. Charpak (voir section 2.2). Le problème avec les MWPC est leur résolution spatiale limitée ainsi que la limite sur le flux de particules qui peut être détecté. En effet, lors du développement de l'avalanche, une charge d'espace positive est créée à cause du grand temps de dérive des ions, qui est de l'ordre de plusieurs dizaines de microsecondes.

Les MSGC sont constitués d'un plan de bandes métalliques gravées par photolithographie (procédé utilisé habituellement pour les circuits imprimés). Plusieurs millimètres au-dessus de ce plan est placé une cathode plane de dérive. L'espace entre cette électrode et le substrat est rempli de gaz ; c'est la région sensible du détecteur. La Fig. 3.1 représente une coupe du détecteur MSGC.
Sur le substrat, les bandes métalliques consistent en une succession alternée d'anodes

et de cathodes séparées par quelques dizaines de microns. Typiquement les anodes sont très étroites, entre 5 et 10 $\mu m$, alors que les cathodes sont plus larges, de l'ordre de 100 $\mu m$. Le pas entre les anodes est typiquement de 200 $\mu m$.

On applique une différence de potentiel de quelques kilovolts entre le plan de dérive et le plan de détection, ce qui donne un champ électrique à peu près uniforme d'une centaine de volt par centimètre dans le volume défini entre les deux plans, sauf à proximité du plan de détection (voir Fig. 3.2). Les charges produites par ionisation (voir section 2.3) dérivent suivant les lignes du champ.
L'avalanche électronique se fait, elle, à proximité des bandes métalliques, où le champ n'est plus uniforme et augmente jusqu'à quelques dizaines de kilovolts par centimètre. Les lignes de champ produites par la configuration des électrodes vont concentrer les électrons primaires vers les bandes d'anodes, alors que les ions produits dans l'avalanche sont collectés principalement par les bandes de cathodes.
Grâce à cette géométrie et à ces champs intense, la collection des ions se fait en un temps de l'ordre de la $\mu s$ par les cathodes adjacentes, soit environ mille fois plus vite que dans les chambres multifils.
Un des grands avantages des MSGC par rapport aux MWPC est la haute granularité. En effet, la lithophotographie permet une grande précision (de l'ordre de 0.1 $\mu m$) dans le placement des anodes et des cathodes, ce qui mène à une grand résolution spatiale (jusqu'à 30 $\mu m$ comme montré dans la réf.[14]).

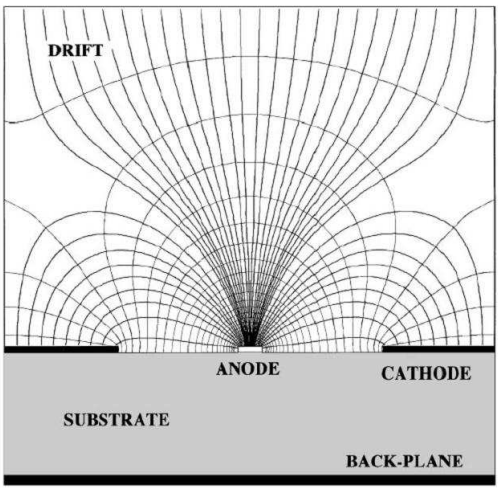


FIGURE 3.2 – Schéma et ligne de champ électrique d'une MSGC.

## 3.3 Gas Electron Multiplier

Les GEM (Gas Electron Multiplier) ont été introduits par F. Sauli en 1996 [15]. Les GEM sont constitués d'une feuille de kapton de quelques dizaines de microns d'épaisseur cuivrée sur les deux faces, percée de manière chimique d'une grande densité de micro-trous (typiquement de 50 à 100 trous par $cm^2$). On applique une différence de potentiel, entre les deux feuilles de cuivre, de quelques centaines de volts, afin d'avoir un champ électrique de l'ordre de 50 $kV/cm$ au centre des trous. Les trous sont de forme conique, et ont un diamètre d'environ 50 $\mu m$. La Fig. 3.3 montre à gauche une feuille de GEM et ses dimensions, à droite, le schéma d'un GEM vu de la tranche, ainsi que les lignes de champ électrique. Les électrons d'ioni-

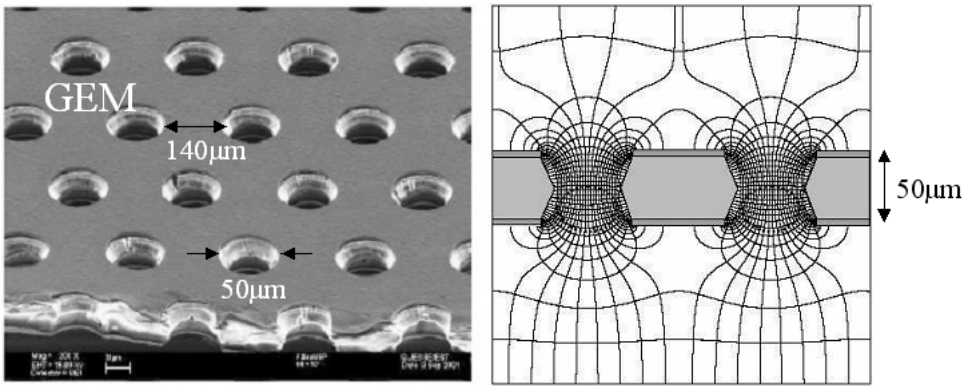


FIGURE 3.3 – A gauche dimensions des GEM ; A droite les lignes de champ électrique.

sation sont accélérés dans les trous, provocant une première multiplication, avec un gain de l'ordre de $10^3$ pour une différence de potentiel de 500 $V$ dans un melange Ne/DME (Di-Methyl-Ethan) 50/50 [16].
La feuille de GEM est généralement placée dans un volume gazeux délimité par une électrode plane située quelques millimètres au-dessus, et par un plan d'anodes quelques millimètre en-dessous. Cependant vu le gain limité à quelques milliers [17] que peut fournir une feuille de GEM, deux ou trois feuilles de GEM sont généralement superposées dans un même volume gazeux pour constituer un détecteur appelé double ou triple GEM. Une autre solution est d'ajouter une feuille de GEM dans le volume sensible d'un détecteur MSGC entre l'électrode de dérive et le substrat, comme illustré à la Fig. 3.4.
Ces géométries permettent de partager le gain total de l'avalanche entre les multiples étages d'amplification et de réduire ainsi la différence de potentiel entre les électrodes, ce qui diminue le risque des décharges et leurs énergies.

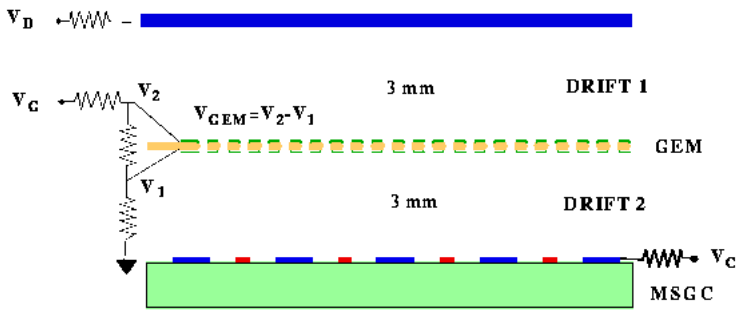


FIGURE 3.4 – Feuille de GEM placé au milieu du volume de gaz d'un MSGC.

## 3.4 MICRO MEsh GAseous Structure

Les Micromegas (MICRO MEsh GAseous Structure) ont été proposés en 1995 par I. Giomataris et al.[18]. Contrairement aux MSGC, le plan de détection des Micromegas n'est constitué que d'anodes.
Au dessus du plan d'anodes est placée une fine grille métallique qui joue le rôle de cathode. Cette grille est maintenue à une centaine de microns du plan d'anodes à l'aide de piliers cylindriques de cinquante microns de diamètre. Une tension de typiquement $-400\ V$ est appliquée à la grille et le plan d'anodes est mis à la terre via l'électronique de lecture afin de créer un champ électrique de l'ordre de 40 $kV/cm$. L'espace ainsi défini constitue le volume d'amplification.
Quelques millimètres au dessus de la grille se trouve l'électrode de dérive qui délimite le volume sensible du détecteur.

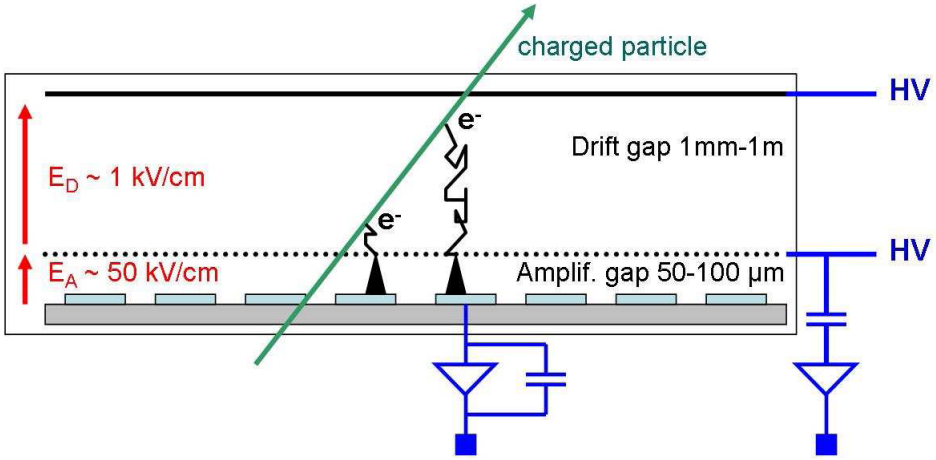


FIGURE 3.5 – Schéma de fonctionnement des Micromegas.

Lorsqu'une particule chargée traverse le volume sensible du détecteur, elle y dépose de l'énergie par ionisation le long de sa trajectoire. Les charges produites dérivent dans cette zone sensible le long des ligne de champ dont la configuration est représentée à la Fig. 3.6. Le champ électrique est relativement faible, de l'ordre de 1 $kV/cm$ dans le volume sensible. Ce champ est constant, ce qui implique une dérive constante des charges jusqu'au voisinage de la grille. Les électrons sont alors

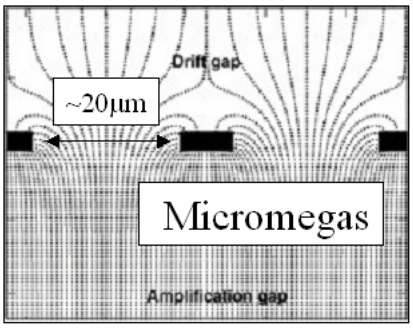


FIGURE 3.6 – Lignes de champ électrique au voisinage de la grille Micromegas.

happés par les trous de la grille et parviennent dans la zone d'amplification où règne un champ constant typiquement 50 fois plus intense que dans le volume sensible. Ce champ très intense est responsable du processus d'avalanche qui se développe, dans le cas des Micromegas, sur toute la distance cathode-anode (de 100 $\mu m$) et non plus uniquement au voisinage des anodes, comme dans le cas des MSGC.

Les électrons atteignent rapidement les anodes tandis que les ions positifs, plus lents, dérivent dans la direction opposée et sont collectés à la micro-grille.
Le champ électrique étant élevé et constant dans tout le volume d'amplification, ces ions en sont cependant rapidement évacués. Typiquement, dans les Micromegas, moins de 30% du signal est induit par les électrons en moins de 5 $ns$ et 70% du signal est créé par les ions en 40 $ns$ [19].

## 3.5 Exemples de TPC actuels

L'utilisation d'une TPC comme détecteur de trace principal a de nombreux avantages.
Tout d'abord, les TPC offrent une excellente capacité de reconnaissance de formes (pattern recognition) en trois dimensions. Le grand nombre de mesures ($> 100$) le long des trajectoires permet une reconstruction précise des trajectoires. Ce grand nombre de mesures permet de compenser une moins bonne résolution spatiale sur les mesures individuelle ($\sim 100$ $\mu m$ voir section 2.8), comparée à la technologie des

détecteurs à micro-pistes au silicium ($15 - 40\ \mu m$). Ainsi pour une résolution équivalente sur les paramètres de traces ($\delta(1/P_T) \sim 10^{-4} GeV^{-1}$), la TPC ne constitue qu'environ 3% de longueur de radiation dans la région centrale et jusqu'à 15% dans les parties avant et arrière où est localisée l'électronique de lecture. Dans un trajectographe constitué d'une dizaine de couches de détecteurs au silicium, comme dans l'expérience CMS, la quantité de matière peut dépasser une longueur de radiation [20].
Cette petite fraction de longueur de radiation pour la TPC implique une faible perte d'énergie des particules avant d'atteindre les calorimètres, réduit la diffusion multiple et limite la probabilité de conversion des photons. Néanmoins les TPC sont des détecteurs relativement lents à cause du temps de dérive des électrons dans le volume de gaz ($< 30\ \mu s$ pour parcourir 2 $m$ dans Ar :$CF_4$ :iso=95/3/2 à $E = 230\ V/cm$).
Les TPC sont par conséquent des candidats sérieux pour équiper les trajectographes des expériences exigeant une grande précision, mais avec des taux de collisions modérés (quelques $MHz$).
Pour montrer leur importance en physique des particules, nous allons présenter quelques exemples de TPC utilisées actuellement en physique des hautes énergies ainsi que les performances attendues de futures grandes TPC envisagées pour des collisionneurs électron-positron.

### 3.5.1 La TPC d'ALICE

ALICE (A Large Ion Collider Experiment) est une des quatre expériences en fonctionnement auprès du LHC (Large Hadron Collider) au CERN à Genève. Le but d'ALICE est d'étudier les collisions d'ions lourds, plomb-plomb par exemple, et en particulier la création du plasma de quarks et de gluons.

Le trajectographe d'ALICE, représenté à la Fig. 3.7, est constitué d'une grande TPC plongée dans un solénoïde qui produit un champ magnétique de 0.5 $T$. La TPC est composée d'un cylindre de 500 $cm$ de long (dans la direction du faisceau) appelé le tonneau. Le tonneau est divisé en deux par une cathode centrale de 30 $\mu m$ d'épaisseur. La TPC a un rayon interne de 80 $cm$ et un rayon externe de 280 $cm$. Les deux extrémités du tonneau sont divisées en 18 secteurs trapézoïdaux qui forment le système de lecture. Le système de lecture est constitué de MWPC avec des anodes rectangulaires, appelées pads. La taille des pads a été étudiée et optimisée pour l'expérience et varie en fonction de leur position radiale de $4 \times 7.5\ mm^2$ à $6 \times 15\ mm^2$. Avec cette géométrie une résolution spatiale dans le plan transverse de l'ordre de 300 $\mu m$ a pu être atteinte [22].
La résolution en impulsions de la TPC d'ALICE est de l'ordre de $(\delta P_T)/P_T \sim 0.01$ pour des impulsions transverse de l'ordre de 1 $GeV/c$.

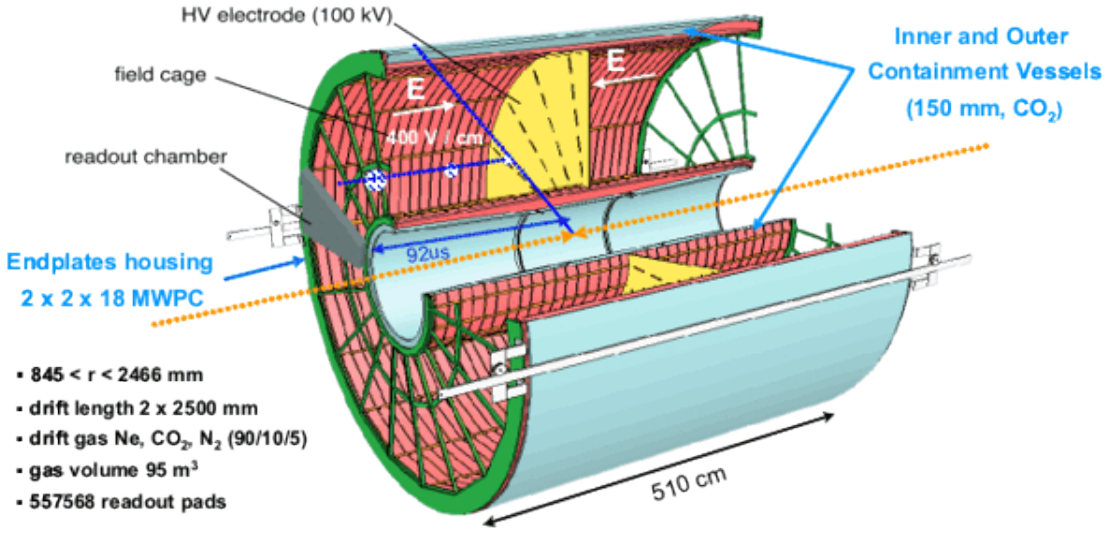


FIGURE 3.7 – Schéma de la TPC d'ALICE [21].

ALICE est la seule expérience présente au LHC à avoir une TPC comme trajectographe, en effet les trois autres expériences (ATLAS, CMS et LHCB) ont des détecteurs à traces au silicium. La grande différence qui a permis ce choix est le moindre taux de collisions. En effet le taux de collisions pour ALICE est de 2.8 $kHz$ pour les collisions proton/proton, et de 300 $Hz$ pour les collisions d'ions lourds.

### 3.5.2 La TPC de l'expérience T2K

T2K (Tokai to Kamioka) est une expérience située au Japon et qui a pour but d'étudier les oscillations $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, en particulier :
- Mesure de l'angle de mélange $\theta_{13}$ de la matrice PMNS (ou amélioration de la limite actuelle d'un facteur $\sim 5$), par l'observation d'apparition de neutrinos électroniques.
- Mesure précise de $\Delta m^2_{23}$ et $\theta_{23}$ par observation de la disparition de neutrinos muoniques.

T2K fait suite à l'expérience K2K (KEK to Kamioka).
L'expérience T2K utilise un faisceau de neutrinos muoniques produit au centre de recherche J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex) situé à Tokai. Ce faisceau est dirigé vers le détecteur Super-Kamiokande situé à 295 $km$ à l'ouest de J-PARC. Le faisceau est produit en faisant collisionner un faisceau de protons sur une cible en graphite [23]. L'expérience utilise aussi un second détecteur, appelé ND280 (Near Detector) situé à 280 $m$ de la cible, qui a pour but de mesurer le flux

de neutrinos avant leurs oscillations.

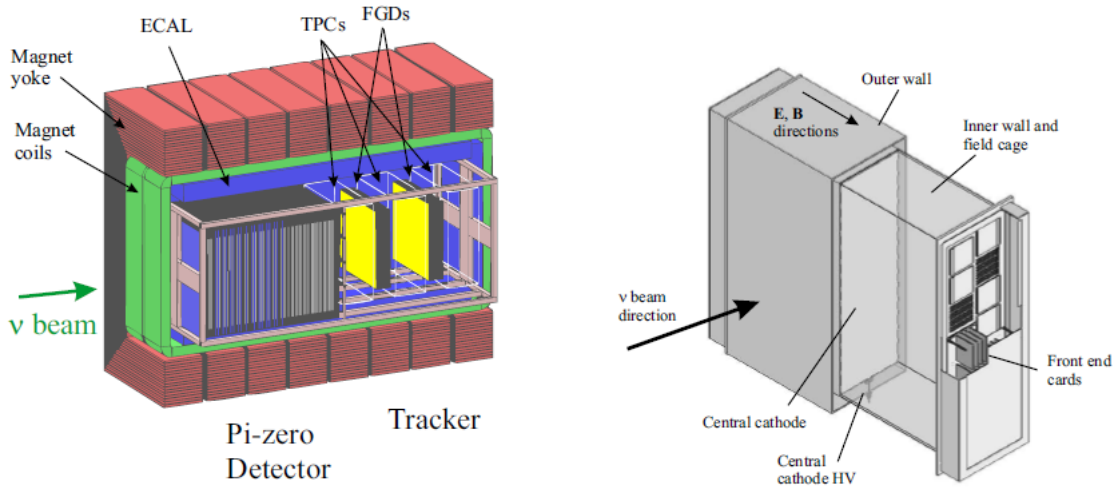


FIGURE 3.8 – À gauche une vue en 3D de ND280 ; À droite le design de la TPC de ND280.

Ce détecteur, illustré à la Fig. 3.8 gauche, est plongé dans un champ magnétique de 0.2 $T$ créé par un aimant de $3.5 \times 3.6 \times 7$ $m^3$. Il y a trois TPC qui entourent des cibles pour les interactions de neutrinos. Les trois TPC, dont une est représentée à la Fig. 3.8 droite, ont pour but de mesurer l'impulsion des muons créés lors des interactions des neutrinos dans les cibles.
Ces TPC équipées de systèmes d'amplification Micromegas sont les premières TPC utilisant des détecteurs à micro-structure au lieu de fils pour l'amplification.
Chaque plan de lecture comporte 12 modules Micromegas. La taille des pads est de $6.9 \times 9.7$ $mm^2$, et la résolution dans le plan x-y pour ces Micromegas est de l'ordre de 600 $\mu m$ pour une distance de dérive d'environ 30 $cm$ [23].

## 3.6 Paramètres pour une future grande TPC

Actuellement, il y a plusieurs projets d'expériences de physique des hautes énergies qui envisagent l'utilisation de TPC. C'est le cas, par exemple, du projet de future collisionneur linéaire électron-positron ILC (International Linear Collider).
L'idée de ce projet est de construire une machine de précision qui succèderait au LHC du CERN. En effet, le LHC a été conçu comme une machine de découverte, et a pour objectifs principaux de mettre en évidence de la nouvelle physique au delà du modèle standard. Mais pour étudier cette nouvelle physique avec grand précision, il serait préférable d'avoir des collisions électron-positron.

Le concept du détecteur ILD (International Large Detector) est assez classique [24] (voir Fig. 3.9). Partant du point d'interaction vers l'extérieur, il sera composé d'un détecteur de vertex en silicium, d'un trajectographe (partie centrale en jaune sur la Fig. 3.9), de calorimètres électroniques et hardoniques, et de chambres à muons, le tout plongé dans un champ magnétique produit par un solénoïde.

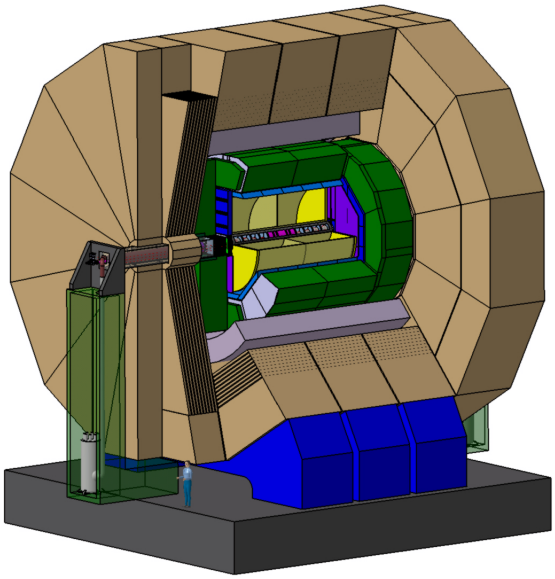

FIGURE 3.9 – Vue du concept de ILD [24].

Dans la plupart des concepts de détecteur pour ILC, il est envisagé d'utiliser une TPC comme trajectographe avec une structure GEM ou Micromegas pour produire l'avalanche. Dans le tableau suivant sont repris une partie des paramètres, des dimensions et performances attendues de la TPC du ILD [24] :

| | |
|---|---|
| Taille | $\phi = 3.4$ m ; $L = 4.3$ m (dimensions externes) |
| Résolution de l'impulsion | $\delta\left(\frac{1}{P_T}\right) \sim 9 \times 10^{-5}/GeV/c$ pour la TPC uniquement |
| Taille des Pads (anodes) | $\sim 1$ mm $\times$ $4-6$ mm |
| Efficacité de détection | $> 97\%$ d'efficacité pour la TPC seule ($P_T > 1\ GeV/c$) |
| $\sigma_{point}$ en r$\phi$ | $< 100\ \mu$m (en moyenne sur $\frac{L}{2}$) |
| Quantité de matière | entre 4 et 15% de $X_0$ |

Comme on peut le voir, la conception d'une TPC pour un futur collisionneur li-

néaire électron-positron comporte de nombreux défis, à la fois de par ses dimensions et de par les performances attendues.
Notons par exemple la très bonne résolution spatiale, de l'ordre de 100 $\mu m$, à atteindre avec des électrodes dont la superficie est de plusieurs millimètres carrées.
L'étude de la résolution spatiale est un des objectifs de ce travail.

# Chapitre 4

# Dispositif expérimental à DESY

## 4.1 Introduction

Les développements de détecteurs pour la génération future d'expériences de physique des particules sont conduits par des collaborations internationales.
De plus en plus, ces développements ont pour objectif l'accroissement de la précision des détecteurs à la fois dans le domaine de la reconstruction de trace et dans le domaine de la calorimétrie. Pour atteindre ces objectifs, les tests avec des faisceaux de particules sont très importants durant la phase de recherche et développement des nouvelles technologies.

Les tests en faisceaux du grand prototype de TPC se font au faisceau test T24 du synchrotron à électrons DESY (Deutsches Elektronen Synchrotron) à Hambourg. Dans ce chapitre, nous allons expliquer le dispositif expérimental utilisé à DESY. Nous commencerons par expliquer les installations de DESY, nous parlerons ensuite du prototype en lui-même, de l'aimant que nous utilisons pour créer le champ magnétique, et nous parlerons de l'électronique de lecture.
Pour finir, nous verrons quelques résultats sur les caractéristiques du grand prototype testé, comme par exemple la vitesse de dérive.

## 4.2 Faisceau

Le centre de recherche DESY (Deutsches Elektronen Synchrotron), sur son site de Hambourg, possède le synchrotron DESY. Les accélérateurs circulaires DESY II et DESY III accélèrent respectivement des électrons et des protons, qui sont ensuite

injectés dans les accélérateurs PETRA et DORIS. Les électrons de DESY II servent aussi à irradier des détecteurs placés dans quatre installations de tests. C'est dans une de ces installations, appelée T24, qu'est testé le prototype de TPC.

Les électrons utilisés pour les tests sont obtenus de la façon suivante (voir Fig. 4.1) [25] [26] : les électrons accélérés de DESY II sont envoyés sur une cible en fibre de carbone ce qui génère un faisceau de photons par bremsstrahlung. Ces photons ont des énergies qui vont jusqu'à 7 $GeV$. Une seconde cible (le "converter") sert à convertir ces photons en des paires électron-positron. Les électrons sont séparés des positrons à l'aide d'un champ magnétique. Pour finir, il y a un collimateur qui a deux rôles. Le premier est de choisir l'énergie des électrons entre 1 et 6 $GeV$, et le deuxième est de rendre le faisceau suffisamment fin pour les besoins de l'expérience (4 $mm$ à l'entrée de la TPC).

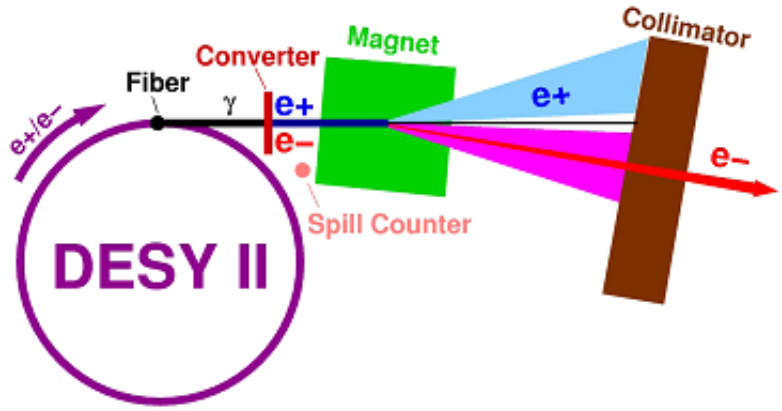


FIGURE 4.1 – Schéma de production du faisceau.

Avant d'atteindre la TPC, les électrons traversent un déclencheur (Fig. 4.2). Ce déclencheur est un télescope constitué de quatre scintillateurs de $3 \times 3$ $cm^2$ et de 3 $mm$ d'épaisseur. Ils sont organisés en paires, et ces deux paires sont espacées d'une centaine de $cm$. Pour avoir un déclenchement, on demande une coïncidence quadruple, au moyen d'une électronique câblée répondant à la norme NIM.

## 4.3 Grand prototype de TPC (LP-TPC)

Le grand prototype de chambre à projection temporelle LP-TPC [26] (Large Prototype Time Projection Chamber représentée à la Fig. 4.3) se compose d'une cage de champ cylindrique fermée aux deux extrémités. Les deux extrémités sont,

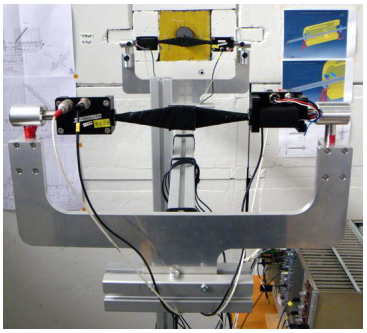

FIGURE 4.2 – Le déclencheur utilisé dans les installations de test T24 à DESY. Le faisceau de particules émerge du mur au travers d'un trou percé dans le béton.

d'un côté la cathode, et de l'autre, le plan de lecture qui peut être équipé par les différentes structures d'amplification (Micromegas ou GEM) et les anodes.

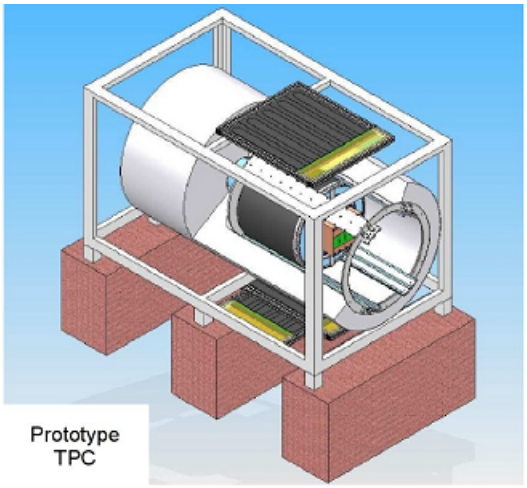


FIGURE 4.3 – Représentation du prototype utilisé à DESY installé au centre du solénoïde.

Le rayon de la cage de champ de LP-TPC est de 730 $mm$. La cage de champ est logé dans un aimant supra-conducteur. Les conditions d'homogénéité du champ magnétique limite la longueur du cylindre à 600 $mm$. Pour ce qui est de la structure du cylindre, elle permet d'éviter les déformations, et elle est conçue de telle manière à minimiser au maximum la quantité de matière ($\sim 1\%$ de longueur de radiation). La cage de champ peut supporter une surpression jusqu'à 10 $mbar$.
Le champ magnétique, fourni par l'aimant supra-conducteur, doit être, bien évidement, le plus homogène possible malgré le fait qu'il n'y ai pas de culasse pour le retour de champ [27]. Sur la Fig. 4.4 on peut voir une représentation du champ magnétique dans lequel est baigné le prototype.

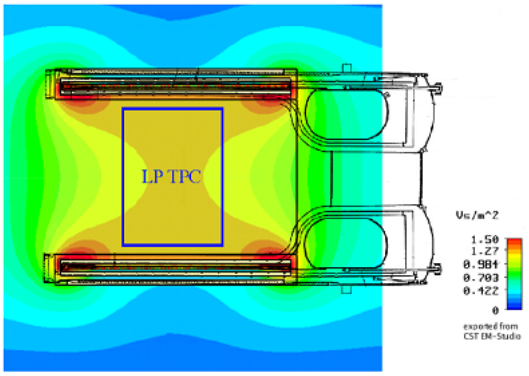


FIGURE 4.4 – Représentation du champ magnétique créé par l'aimant supraconducteur avec en son centre la TPC.

Il faut aussi que le champ électrique soit suffisamment homogène pour tout le volume de dérive. Pour rendre le champ électrique homogène, le champ est créé par une série de bandes de champ qui ont un potentiel qui diminue de l'anode jusqu'à la cathode. Ces bandes de champ sont des bandes de kapton de 75 $\mu m$ d'épaisseur entourées de bandes de cuivre de 35 $\mu m$. Le tout est collé à l'intérieur de la cage de champ. C'est tout ce système qui permet d'avoir un champ électrique bien homogène. Le potentiel de la cathode est d'environ $-14.5\ kV$ ce qui donne un champ de dérive de l'ordre de 230 $V/cm$.

L'ensemble du système, constitué de l'aimant et du prototype, est monté sur une table motorisée. Cette table permet de déplacer le système de lecture par rapport au faisceau d'électrons, donc de modifier la distance de dérive des électrons, tout en ne modifiant pas le champ magnétique par rapport à la TPC. De plus, la TPC peut tourner autour de son axe, dans l'aimant, selon que l'on enregistre des données avec faisceau ou avec des rayons cosmiques.

## 4.4 Modules Micromegas

Le plan d'anodes du grand prototype, représenté à la Fig. 4.5, peut accommoder 7 modules de $\sim 17 \times 23\ cm^2$. Jusqu'à présent, avec Micromegas, un seul module a été testé à la fois avec le grand prototype. Chaque module possède 1728 anodes rectangulaires (que nous appellerons pads) rangées en 24 lignes (avec un pas de 6.8 $mm$) et 72 colonnes (avec un pas variant autour de 3 $mm$). Deux de ces pads sont utilisés pour connecter la grille à la haute tension, et tous les autres pads sont connectés à l'électronique de lecture.
Il est à remarquer que les modules ont une certaine courbure. En effet, les lignes

de pads suivent des arcs de cercles concentriques, comme montré à la Fig. 4.5. Les modules sont orientés de manière à ce que le coté des pads de 6.8 $mm$ soit aligné avec le faisceau. Lors de l'enregistrement de données avec des muons cosmiques, la TPC est tournée de 90° dans le sens horlogique.

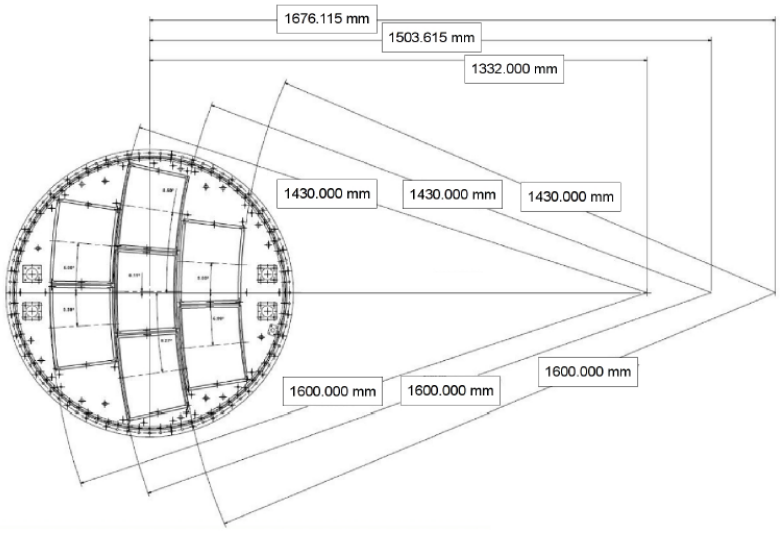


FIGURE 4.5 – Géométrie des modules testés

Depuis 2008, plusieurs prototypes Micromegas ont été testés dans le cadre de la collaboration LP-TPC [28]. J'ai étudié deux de ces modules. Dans le premier module, les anodes sont recouverte d'une couche d'encre résistive ($\sim 3M\Omega/\square$) et dans le second, les anodes sont recouverte d'une couche de kapton résistif ($\sim 5M\Omega/\square$). Ces modules ont été fabriqués au CERN. La Fig. 4.6 est une photographie de 4 modules Micromegas tels que ceux étudiés dans ce travail.

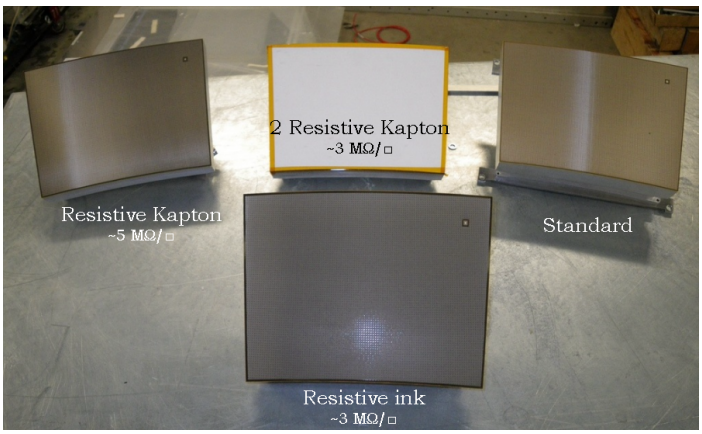


FIGURE 4.6 – Les différents modules testés.

Dans les Micromegas, la dimension transverse typique de l'avalanche est de l'ordre de 15 $\mu m$. Ainsi, dans un gaz à faible coefficient de diffusion, la charge n'est pas suffisamment dispersée que pour atteindre plus d'un pad, même pour des pads de 1 $mm$ de large [29]. Dans ce cas, la résolution spatiale est, au mieux, la largeur du pad/$\sqrt{12}$. Par conséquent, pour atteindre une résolution spatiale de l'ordre de 100 $\mu m$, il faut soit choisir des pads plus petits (et donc multiplier le nombre de canaux d'électronique) soit implémenter une technique pour accroître la dispersion après l'avalanche.
C'est cette dernière solution, illustrée à la Fig. 4.7, qui a été adoptée, en ajoutant une couche résistive sur les anodes [30].

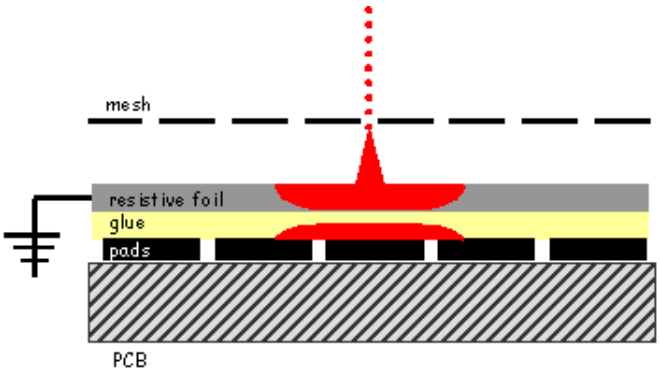


FIGURE 4.7 – Schéma d'un détecteur Micromegas avec couche résistive.

## 4.5 Le gaz T2K

Le gaz utilisé dans la TPC lors des tests en faisceaux est un mélange d'argon, de fréon et d'isobutane (Ar 95%, $CF_4$ 3%, $C_4H_{10}$ 2%). Ce mélange est appelé gaz T2K, en référence à l'expérience T2K (Tokai to Kamioka) où il a été utilisé pour la première fois dans une TPC équipée de Micromegas.
Le choix de l'argon est assez classique et a déjà été expliqué dans le paragraphe 2.6. L'isobutane a été choisi pour ses bonnes propriétés de quencher. Le fréon a lui aussi des propriétés de quencher, mais est beaucoup moins bon que l'isobutane. Le fréon est surtout ajouté pour des raisons de vitesse de dérive des électrons. En effet, pour un champ électrique de 230 $V/cm$, la vitesse de dérive augmente de $\sim$ 3 $cm/\mu s$ sans fréon, à 7.5 $cm/\mu s$ en présence de 3% de fréon (voir Fig. 4.8 droite). L'autre avantage du fréon est qu'il augmente le facteur $\omega\tau$ ce qui a pour effet de diminuer la diffusion transverse et améliore donc la résolution (voir section 2.4.3).
Ainsi le coefficient de diffusion transverse diminue de près d'un facteur 2 à un champ électrique de 230 $V/cm$, comme on peut le voir à la Fig. 4.8 gauche.

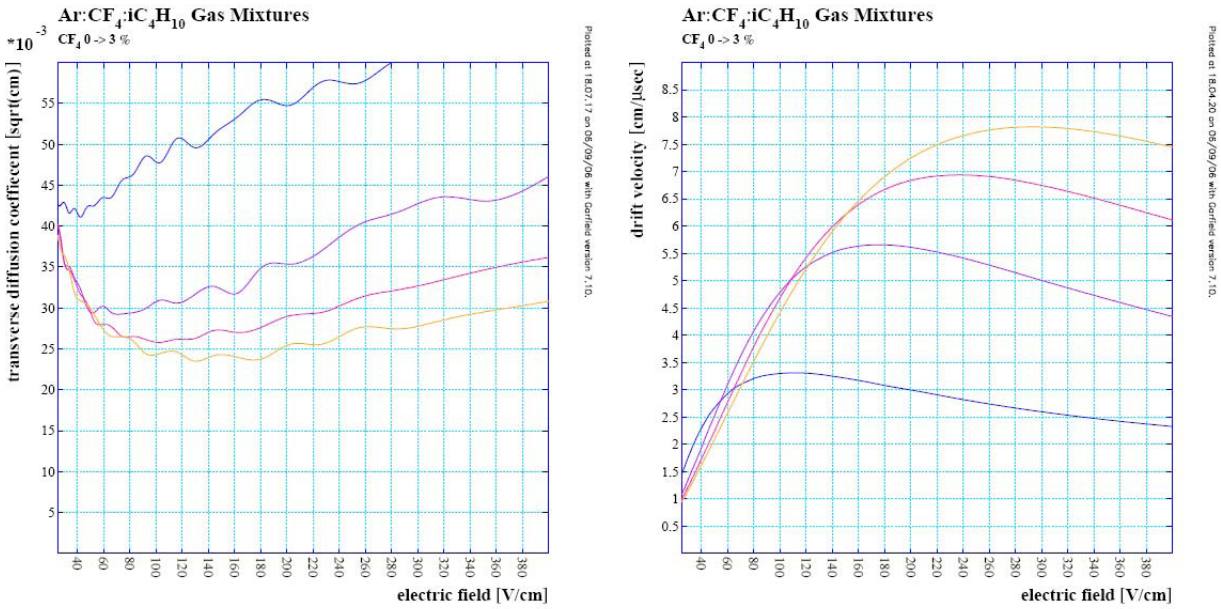


FIGURE 4.8 – À gauche le coefficient de diffusion et à droite la vitesse de dérive en fonction du champ électrique pour différents pourcentages de Fréon (de 0% pour la courbe bleu à 3% pour la courbe jaune) [31].

## 4.6 Électronique (AFTER)

L'électronique AFTER a été développée pour pouvoir être adaptée à différents détecteurs et à différents mélanges gazeux. Par conséquent certains paramètres comme le gain du pré-amplificateur, le temps de mise en forme ou la fréquence d'échantillonnage du signal peuvent être modifiés pour optimiser la réponse de l'électronique en fonction des performances du détecteur (comme par exemple la vitesse de dérive).
L'architecture de l'électronique AFTER est représentée à la Fig. 4.9.

Une puce d'électronique AFTER comporte 72 canaux. Chaque canal est constitué d'une partie responsable de la collection de la charge provenant du détecteur et de la mise en forme du signal, suivie d'un réseau de condensateurs SCA (Switched Capacitor Array), responsable de l'échantillonnage et du stockage du signal analogique. Le SCA est composé de 511 capacités, pour chaque canal, et fonctionne à une fréquence allant de 10 à 100 $MHz$. Dans ce travail la fréquence d'échantillonnage utilisée est de 25 $MHz$. Lorsque l'électronique reçoit un signal du déclencheur (voir section 4.2), l'état du SCA est figé, et les capacités sont lues de manière séquentielle par un convertisseur analog-to-digital (ADC) de 12-bit, fonctionnant à 20 $MHz$. Le

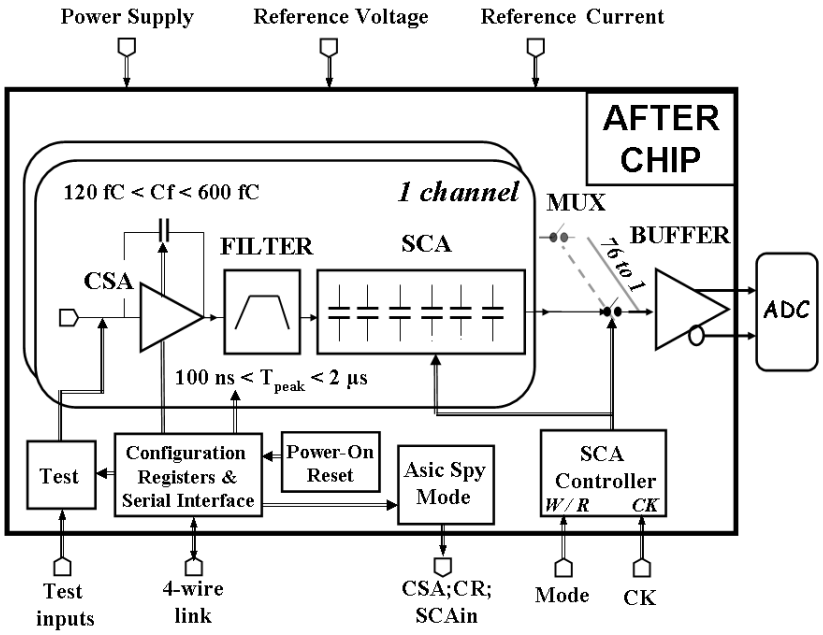


FIGURE 4.9 – Architecture de l'électronique AFTER [32].

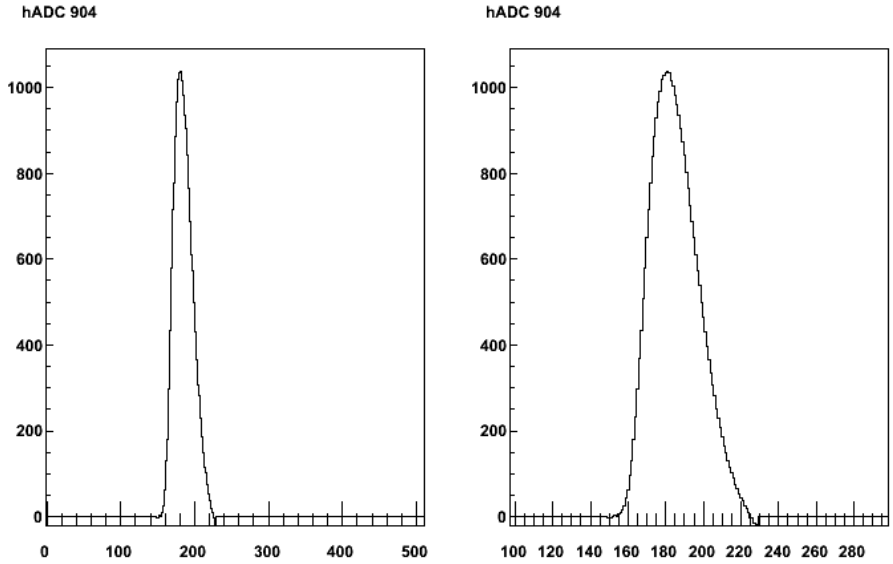


FIGURE 4.10 – Charge mesurée par un pad et convertie par l'ADC en fonction du numéro de l'échantillon. L'électronique AFTER fonctionne avec une fréquence d'échantillonnage de 25 $MHz$ et un temps de montée de 500 $ns$.

temps de lecture de toute la mémoire atteint 2 $ms$.
Les données sont ensuite transmises à une carte d'électronique digitale qui effectue la soustraction des piédestaux et une suppression de zéro. Grâce à la suppression

de zéro, les canaux avec une amplitude maximale inférieure à un seuil réglable (40 "coups" d'ADC dans notre cas, comme on peut le voir sur la distribution de charge à la Fig. 4.11) ne sont pas transmis vers le système d'acquisition de données, situé hors de la zone de test.

Le système d'acquisition est constitué de cartes d'électronique, responsables d'as-

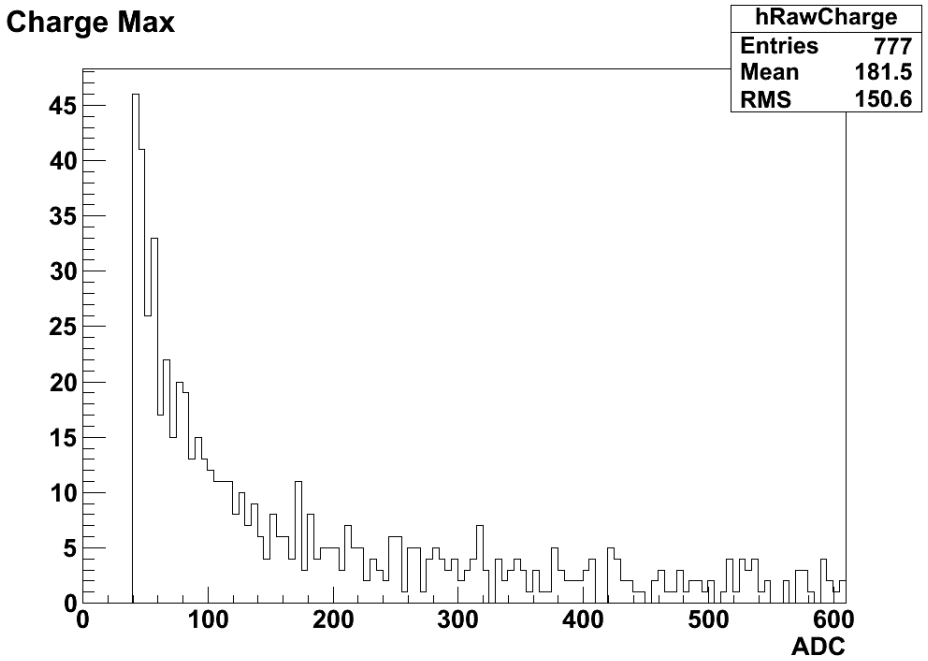


FIGURE 4.11 – Distribution des charges maximum enregistré pour 1 événement, avec coupure à 40 ADC.

sembler les données relatives à un même évènement, couplées à un PC où les données sont stockées et où une fraction des données est analysées en temps réel pour surveiller les tests en cours.

## 4.7 Analyse des données brutes

La première étape de l'analyse est de visualiser les traces enregistrées par le détecteur, événement par événement pour en étudier les caractéristiques de base (distribution de la charge déposée sur les pads, nombre de pads touchés par ligne, etc).

Comme l'électronique de lecture effectue une suppression de zéro, seules les données brutes relatives aux pads ayant une charge maximale supérieure à 40 coups d'ADC sont transmises au système d'acquisition et stockées sur disque. Pour ces pads, les

données brutes contiennent 511 lectures successives de la charge mesurée par le pad et convertie par l'ADC. Ainsi avec une fréquence d'échantillonnage de 25 $MHz$, la distribution de la charge sur ces 511 lectures successives représentent l'évolution temporelle du signal sur une durée de $511 \times 40\ ns \simeq 20\ \mu s$. C'est ce qui est représenté à la Fig. 4.10 gauche, qui représente la charge en nombre de coups d'ADC en fonction du numéro de l'échantillon. La Fig. 4.10 droite montre un élargissement du signal de la figure de gauche. Le signal est caractérisé par un temps de montée de 500 $ns$.

Nous avons également observé la distribution de la charge maximale enregistrée par les 1728 anodes, événement par événement [1]. La distribution pour un événement est montré à la Fig. 4.11. La distribution exhibe bien la coupure à 40 coups d'ADC due à la suppression de zéro.

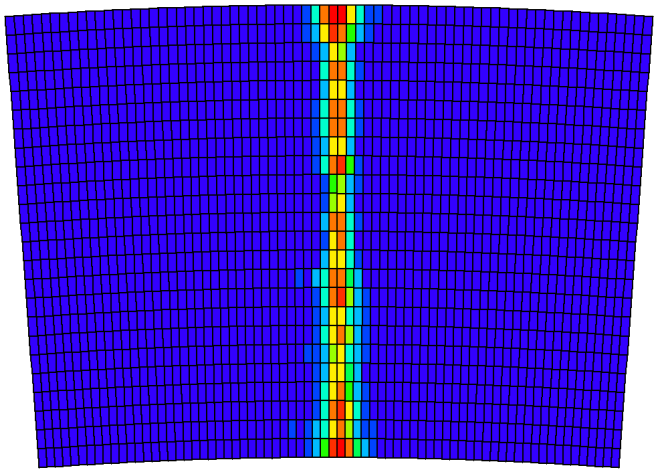

FIGURE 4.12 – La charge maximale enregistrée par l'ensemble des 1728 anodes pour un événement.

La Fig. 4.12 montre, pour un événement typique, la charge maximale enregistrée sur chacun des pads du détecteur ; la couleur bleu foncé indiquant l'absence de signal sur le pad et la couleur rouge indiquant la charge la plus élevée. La trace laissée par un électron du faisceau est clairement identifiable au centre du détecteur.

## 4.8 Mesure de la vitesse de dérive

Pour calculer la vitesse de dérive des électrons dans le gaz de la TPC, il faut mesurer le temps que met la particule incidente pour être détectée par les anodes,

1. On appelle ici "événement" l'ensemble des données enregistrées par l'électronique de lecture à l'instant où elle reçoit le signal du déclencheur.

tout en connaissant la distance entre le faisceau et le plan d'anodes.
Grâce à la table mobile, il est possible de prendre plusieurs séries de mesures en changeant la distance entre le faisceau et le plan d'anodes.
À une distance donnée, la Fig. 4.13 représente le numéro de l'échantillon ayant mesuré la charge maximale et ce pour l'ensemble des pads pour un événement. Le numéro de l'échantillon peut être converti en un temps, puisque l'on connait la fréquence d'échantillonnage ; sur la Fig. 4.13, par exemple, le pic maximal se trouve à l'échantillon numéro 155, ce qui correspond à un temps de 6.2 $\mu s$ puisque la fréquence d'échantillonnage est de 25 $MHz$.

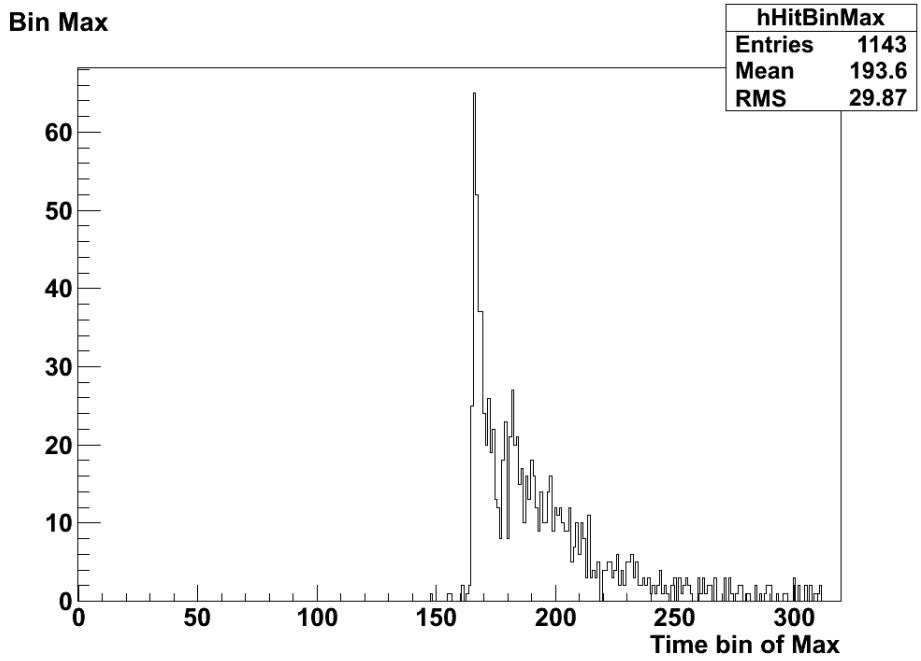


FIGURE 4.13 – Distribution du temps d'arrivée mesuré pour la charge maximale sur chacun des pads pour un événement.

Pour chaque distance de dérive, le temps correspondant à ce pic est enregistré pour plusieurs milliers d'événements. On ajuste alors une gaussienne sur la distribution du temps de dérive par la méthode des moindres carrés. La moyenne de cette gaussienne sera le temps de dérive des électrons et l'écart type l'erreur sur cette mesure.
Une fois que l'on a effectué cette mesure pour plusieurs distances de dérive, on peut ajuster une droite sur le graphique du temps de dérive en fonction de la distance. Le coefficient de cette droite est l'inverse de la vitesse de dérive.

Le coefficient angulaire obtenu dans notre cas est de $133.9 \pm 1.561$ $ns/cm$. Ce qui correspond à une vitesse de dérive de $7.47 \pm 0.09$ $cm/\mu s$.

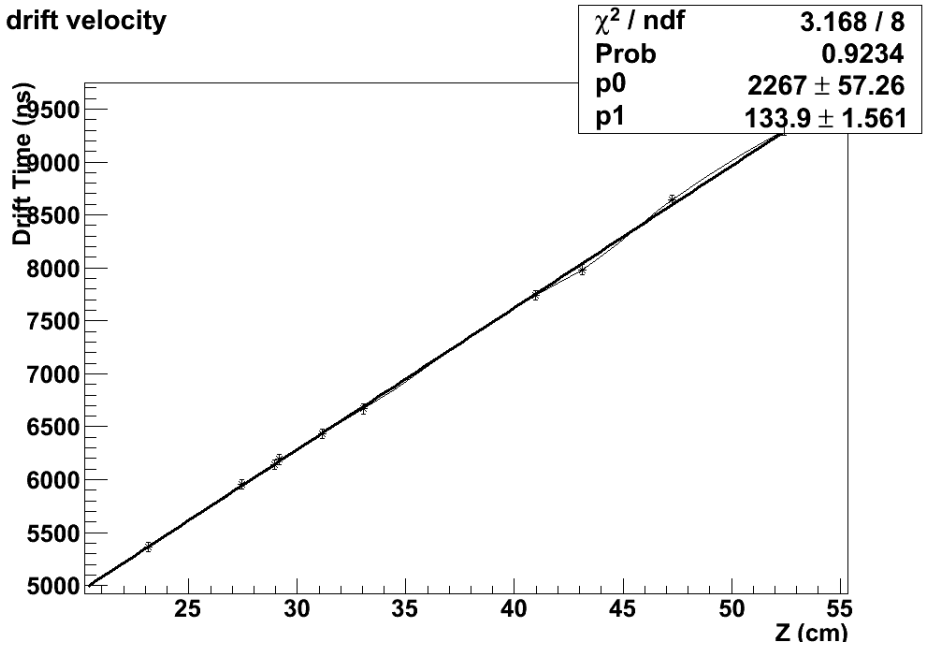


FIGURE 4.14 – Temps de dérive en fonction de la distance parcourue.

Cette valeur est comparable à la valeur obtenue par simulation (en utilisant le programme Magboltz [33]), qui est de $7.548 \pm 0.003\ cm/\mu s$.

## 4.9 Sélection des traces

Avant de mesurer précisément la résolution spatiale du détecteur, il est nécessaire d'effectuer d'abord une sélection des trajectoires à reconstruire. En effet, lors de la prise de données, le déclencheur (voir section 4.2) n'applique aucune sélection sur les événements. Or, un certain nombre d'événements doivent être exclus de l'analyse pour les raisons suivantes :

- certains électrons incidents peuvent interagir avec les matériaux constituant le solénoïde ou la cage de champ de la TPC avant d'arriver dans le volume de gaz. Suite à ces interactions l'électron initial peut être fortement dévié et perdre une fraction importante de son énergie. Dans ce cas la trajectoire de l'électron peut être décentrée (Fig. 4.15 gauche), ou bien plusieurs autres traces peuvent être détectées dans l'événement (Fig. 4.15 droite).
- certains électrons incidents peuvent subir, dans le gaz, des collisions avec un large transfert d'énergie, provoquant l'émission d'électrons énergétiques, appelés électron-$\delta$, qui ont assez d'énergie pour parcourir plusieurs millimètres, ce qui entraine un élargissement de la trace de la particule incidente (Fig. 4.16).

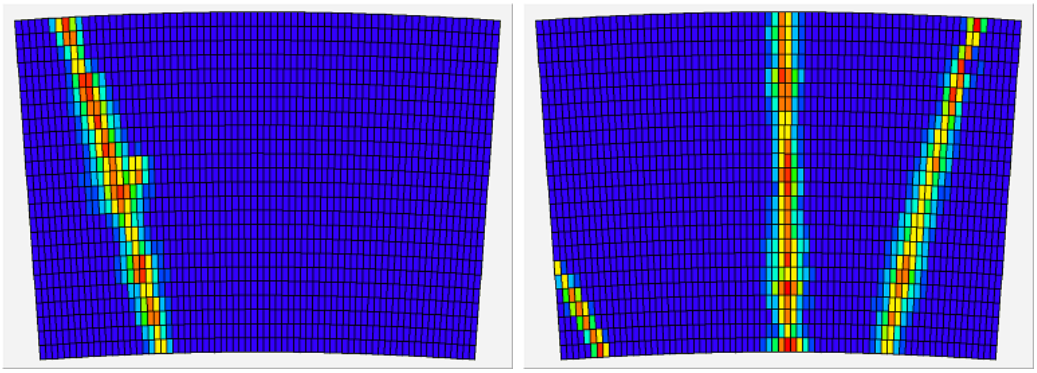

FIGURE 4.15 – À gauche : une trajectoire décentrée ; à droite : événement à plusieurs traces.

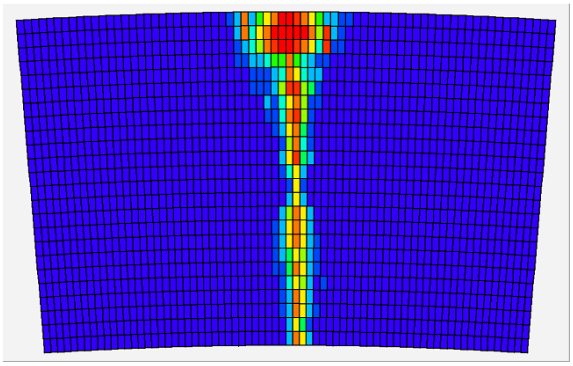

FIGURE 4.16 – Exemple d'événement avec un électron-$\delta$.

Pour ne pas biaiser la mesure de la résolution à cause de tels effets, une sélection assez stricte est appliquée sur les traces :

La première coupure consiste à vérifier qu'il n'y a qu'une seule trace dans l'évènement étudié. Cette coupure permet d'éliminer les évènements où l'électron incident aurait interagi avant de rentrer dans le détecteur, ou dans le volume de gaz.
Le test pour cette coupure consiste à regarder ligne par ligne si il y a un autre dépôt de charge, c'est à dire trois pads adjacents ayant mesuré une charge. Si l'on trouve plus de 5 lignes pour lesquelles c'est le cas, on élimine l'évènement.

La seconde coupure exige que le premier point mesuré dans le détecteur, c'est à dire l'anode ayant mesuré la plus grande charge sur la première ligne, soit au milieu de cette ligne. La position du faisceau, ainsi que sa largeur (4 $mm$) étant connue, cette coupure permet d'éliminer les traces des électrons qui auraient fortement été défléchis avant d'entrer dans la TPC.
Pour implémenter cette coupure, il y a un test sur la première ligne qui exige que la plus grande charge mesurée soit localisée entre les colonnes 30 et 40.

Après ces deux coupures, il ne reste plus que des traces seules qui commencent au centre du détecteur. Pour éliminer les électrons qui auraient perdu de l'énergie avant d'entrer dans le détecteur mais qui entreraient néanmoins au centre de celui-ci, nous avons demandé que la trace soit suffisamment droite, et pour cela nous comparons la position de la première mesure (la position sur la première ligne) avec la dernière mesure (la position sur la dernière ligne).
Le test qui est utilisé pour cette coupure exige que la différence en nombre de colonnes entre la position de la charge maximum mesurée sur la première et la dernière ligne soit inférieure à 6.

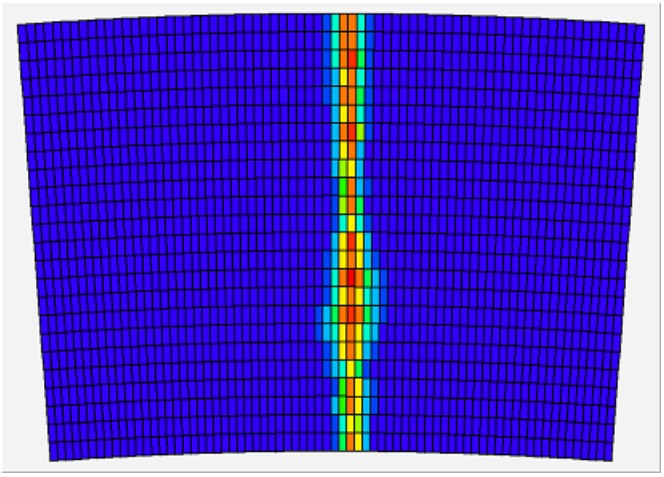

FIGURE 4.17 – Exemple de trace acceptée.

Après coupures, l'échantillon compte encore $\sim$ 50% de traces telles que celle représentée à la Fig. 4.17 et pouvant servir à la mesure de la résolution spatiale.

## 4.10 Mesure de la position

Une fois que les événements sont sélectionnés, il faut encore déterminer la position de l'électron incident sur chacune des lignes de pads. Dans ce travail nous avons eu recours à deux méthodes : la méthode "classique" du barycentre et la méthode dite de la fonction réponse des pads (PRF, Pad Response Fonction).

### 4.10.1 Barycentre de charges

Le barycentre de charge ($\overline{x}$) est une moyenne de la position des pads ($x_i$) qui ont mesurés une charge, pondérée par la charge mesurée ($q_i$).

$$\overline{x} = \frac{1}{q_t} \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$$

où $n$ est le nombre de pads que l'on prend en compte pour la moyenne et $q_t$ la charge totale. La charge se déposant sur les pads adjacents au pad ayant enregistré le plus grand signal, nous calculons le barycentre de 9 pads, en prenant comme pad central de ce groupe l'anode avec la plus grande charge de la ligne.
Comme nous connaissons la position des lignes dans le détecteur, après avoir effectué ce barycentre sur les 24 lignes, nous avons 24 positions dans le plan par lesquelles nous ajusterons les traces pour l'étude de la résolution spatiale.

### 4.10.2 Pad Response Fonction

Dans les détecteurs Micromegas avec couche résistive, il est plus approprié d'utiliser la méthode dite de la PRF pour calculer la position des hits dans le détecteur (voir Fig. 4.7).
L'idée de cette méthode est de comparer l'amplitude du signal mesurée avec une amplitude calculée afin de déterminer la position du hit sur chaque ligne.

Si une charge ponctuelle est déposée à l'instant $t = 0$ à l'origine d'une surface résistive, on peut montrer [30] que la densité de charge $\rho$ sur cette surface est solution de l'équation de télégraphe à deux dimensions :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{RC} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$$

où $x$ est la position, $t$ le temps et où $R$ et $C$ sont respectivement la résistance de la surface et la capacité par unité de surface.
La solution de cette équation est donnée par la relation suivante :

$$\rho(x,t) = \frac{RC}{2t} \exp\left( -\frac{RCx^2}{4t} \right)$$

On voit donc que la densité de charge dépend de la position et du temps comme on peut le voir sur la Fig. 4.18.

L'amplitude de l'impulsion sur chacun des pads d'un détecteur avec couche résis-

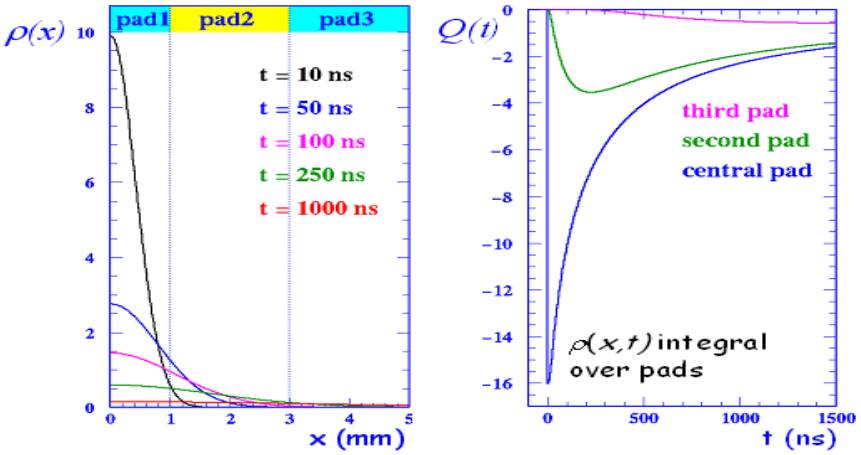


FIGURE 4.18 – À gauche la densité de charge en fonction de la position pour différents temps ; à droite la charge déposée sur 3 pads adjacents en fonction du temps.

tive dépend donc à la fois de la position de la trace par rapport à ce pad et du temps de montée du signal. La forme de la distribution de charge sur des pads adjacents n'est donc pas gaussienne. La PRF, représentée à la Fig. 4.19 pour un mélange gazeux $Ar/CO_2$ pour deux distances de dérive (1 et 14 $cm$), peut être décrite comme le rapport de deux polynômes du $4^{\text{ième}}$ ordre :

$$PRF(x, \Gamma, \Delta, a, b) = \frac{1 + a_2 x^2 + a_4 x^4}{1 + b_2 x^2 + b_4 x^4}$$

où les coefficients $a_i$ et $b_i$ $(i = 2, 4)$ des deux polynômes peuvent être exprimés en terme de la longueur à mi-hauteur, $\Gamma$, de la largeur à la base de la PRF, $\Delta$ et de deux paramètres de normalisation $a$ et $b$.

Une fois que la PRF du détecteur est connue, la position du hit sur une ligne est obtenue en ajustant, par moindres carrés, la distribution de charge sur les pads calculée avec la PRF à la distribution des charges mesurées.

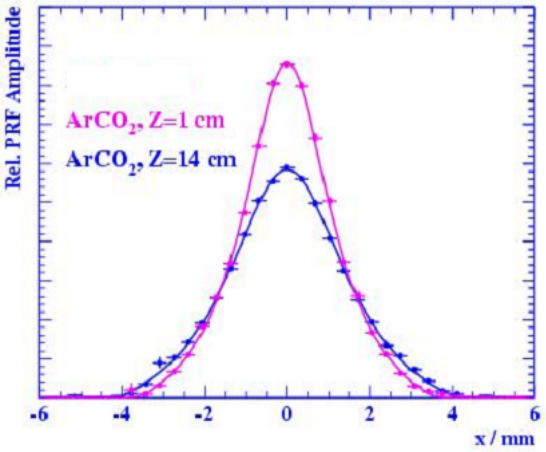


FIGURE 4.19 – Exemple de PRF mesurée pour un mélange gazeux d'argon et de $CO_2$ pour deux distances de dérive [34].

# Chapitre 5

# Filtre de Kalman

## 5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de comprendre comment estimer un vecteur d'état à partir de mesures bruitées. Pour cela, nous allons développer les équations de filtres linéaires optimaux. Il y a plusieurs types d'estimations : l'*Analyse* est l'estimation du vecteur d'état présent, la *prédiction* est l'estimation du vecteur d'état pour un temps futur, et le *lissage* estime la valeur du vecteur d'état pour un temps passé en tenant compte de toutes les mesures qui ont été faites jusqu'à présent. Nous allons commencer par quelques rappels sur la notion d'estimateur, nous discuterons ensuite de la notion de filtre récursif, puis, du filtre de Kalman discret, nous nous intéresserons, pour finir, à l'application du filtre dans le cas de l'ajustement de traces.

## 5.2 Estimateur

### 5.2.1 Définitions et propriétés

L'estimateur d'un paramètre [35] [36] peut être considéré comme la mesure d'un paramètre (dont on fait l'hypothèse qu'il a une valeur fixée, mais qui nous est inconnue) basée sur un nombre limité d'observations expérimentales. L'estimation d'un paramètre consiste donc à déterminer une valeur, ou un domaine de valeurs, qui doit être proche ou inclure la valeur réelle du paramètre.
Pour estimer un paramètre, il faut d'abord choisir une fonction des observations, c'est-à-dire, une méthode pour obtenir une estimation à partir des observations. C'est ce qu'on appelle l'estimateur. Soit $\hat{\boldsymbol{a}}_n$, l'estimateur du paramètre $\boldsymbol{a}$ basé sur

une série de $n$ mesures $\boldsymbol{m}$.
L'estimateur est dit non-biaisé si son espérance [1] est la même que l'espérance de la quantité estimée.

$$E[\hat{\boldsymbol{a}}] = E[\boldsymbol{a}] = \mu$$

Un estimateur (non-biaisé) est dit de variance minimum s'il a la propriété d'avoir sa variance [2] plus petite ou égale à la variance de tous les autres estimateurs non-biaisés.
Un estimateur est dit consistant s'il converge vers la vraie valeur de $\boldsymbol{a}$ lorsque le nombre de mesures augmente.
Nous allons donc, assez naturellement, nous intéresser aux estimateurs non-biaisés de variance minimum et consistants pour le reste de ce travail. Il existe plusieurs méthodes pour calculer des estimateurs, comme le maximum de vraisemblance, la méthode des Moindres Carrés, ou encore la méthode de Bayes.
Dans ce mémoire nous utiliserons tout d'abord la méthodes des Moindres Carrés, car elle est simple, rapide et constitue la base d'une large gamme d'applications. Cependant cette méthode est une méthode globale. Pour de nombreuses applications, il est plus avantageux de mettre à jour l'estimateur lorsqu'une nouvelle mesure est disponible. C'est le cas des filtres récursifs. Dans le cadre de ce travail, nous étudierons en particulier le filtre de Kalman appliqué à la reconstruction de traces.

### 5.2.2 La méthode des Moindres Carrés

Supposons que l'on ait un ensemble de $l$ mesures, $\boldsymbol{m}$, qui peuvent être exprimées comme combinaison linéaire de $n$ éléments d'un vecteur constant $\boldsymbol{a}$ plus une erreur de mesure, $\boldsymbol{\epsilon}$. C'est-à-dire

$$\boldsymbol{m} = H\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\epsilon}$$

1. Rappel : L'espérance d'une variable aléatoire distribuée suivant une fonction de densité de probabilité $f(a)$ est définie comme :

$$E[a] = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a) da$$

2. La variance est définie comme :

$$E[(a - E[a])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (a - \mu)^2 f(a) da = \sigma^2$$

où $H$ est une matrice $n \times l$. On choisit comme estimateur ($\hat{\boldsymbol{a}}$), la valeur qui minimise la somme du carré de la déviation $(m_i - \hat{m}_i)$. Ce qui est équivalent à minimiser :

$$\mathbf{J} = (\boldsymbol{m} - H\hat{\boldsymbol{a}})^T(\boldsymbol{m} - H\hat{\boldsymbol{a}})$$

C'est-à-dire de résoudre $\dfrac{\partial \mathbf{J}}{\partial \hat{\boldsymbol{a}}} = 0$, ce qui donne l'estimateur

$$\hat{\boldsymbol{a}} = (H^T H)^{-1} H^T \boldsymbol{m}$$

## 5.3 Filtre récursif

Un filtre récursif est un filtre qui n'a pas besoin de conserver les mesures passées pour calculer l'estimateur présent. Pour comprendre ce concept, nous allons commencer par un exemple simple. Nous généraliserons ensuite ce concept à des quantités vectorielles, afin d'arriver à une expression récursive d'un estimateur.

### 5.3.1 Exemple

On veut estimer un scalaire $a$ constant, en se basant sur une série de $k$ mesures bruitées $m_i$, où $m_i = a + \epsilon_i$ pour $i$ allant de 1 à $k$, où $\epsilon_i$ représente le bruit de la mesure (on va supposer le bruit blanc). Un bon estimateur, c'est à dire un estimateur non-biaisé de variance minimum et consistant, $\hat{a}_k$ de ce scalaire est la moyenne de la mesure :

$$\hat{a}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i$$

Si l'on a une mesure additionnelle, on a alors :

$$\begin{aligned}
\hat{a}_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} m_i \\
&= \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} m_i\right) + \frac{1}{k+1} m_{k+1} \\
&= \frac{k}{k+1}\hat{a}_k + \frac{1}{k+1} m_{k+1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\hat{a}_k + \frac{1}{k+1} m_{k+1} \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

On voit donc que l'on n'a plus besoin de toutes les mesures passées pour calculer le nouvel estimateur, mais uniquement de l'estimateur précédent et de la nouvelle mesure. On a donc ce qu'on appelle un estimateur linéaire récursif.
On peut réécrire l'Eq.(5.1) sous la forme :

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + \frac{1}{k+1}\left(m_{k+1} - \hat{a}_k\right)$$

Sous cette forme, on voit que le nouvel estimateur est donné comme l'estimateur avant la mesure plus la différence pondérée entre la nouvelle mesure et son espérance, donnée par l'ancien estimateur.

### 5.3.2 Généralisation

On peut généraliser ce concept à des quantités vectorielles.
Nous allons considérer un système discret, dont les états au site de mesure $k$ seront notés $\boldsymbol{a}_k$.
L'évolution de ce vecteur d'état peut être décrit par un ensemble d'équations différentielles. Nous avons donc un système dynamique discret, qui sera décrit par le système d'équations suivant :

$$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\boldsymbol{a}_{k-1}\right) + \boldsymbol{w}_{k-1}$$

où $\boldsymbol{f}_{k-1}$ est la fonction de propagation entre le site de mesure $k-1$ et le site $k$, et $\boldsymbol{w}_k$ est une contribution aléatoire sans biais ($< \boldsymbol{w}_k >= 0$), et de covariance $Q_k \equiv < \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^T >$.

Ce vecteur d'état ne peut normalement pas être observé directement. De manière générale, nous avons accès à des mesures $\boldsymbol{m}_k$ fournies par un détecteur $k$. Ces mesures sont des fonctions du vecteur d'état ($\boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{a}_k\right)$), altérées par un bruit de mesure $\boldsymbol{\epsilon}_k$. Ce que nous pouvons décrire par l'équation de mesure

$$\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{h}_k\left(\boldsymbol{a}_k\right) + \boldsymbol{\epsilon}_k \tag{5.2}$$

Où les $\boldsymbol{m}_k$ sont l'ensemble de $l$ mesures au site $k$ : $\boldsymbol{m}_k = \begin{pmatrix} m_{1k} \\ m_{2k} \\ . \\ . \\ . \\ m_{lk} \end{pmatrix}$.
On suppose que le terme de bruit, $\boldsymbol{\epsilon}_k$, est non-biaisé ($< \boldsymbol{\epsilon}_k >= 0$) et de covariance

$R_k \equiv < \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T >$.
Dans le cas le plus simple, les deux fonctions $\boldsymbol{f}_k$ et $\boldsymbol{h}_k$ sont linéaires. On parle alors de système dynamique linéaire discret.
Dans un tel système, le vecteur d'état est simplement décrit par une transformation linéaire, plus une petite perturbation aléatoire :

$$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{F}_{k-1}$ est une matrice, que l'on appelle *matrice de propagation.*
Les mesures sont, elles aussi, des fonctions linéaires du vecteur d'état

$$\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k \tag{5.4}$$

où $\boldsymbol{H}_k$ est également une matrice, qui est appelée *matrice de projection.*

Pour la clarté du texte, nous allons commencer par définir quelques notations. Comme nous venons de le voir, le vecteur d'état au site de mesure $k$, est noté $\boldsymbol{a}_k$. L'estimateur de ce vecteur d'état utilisant les mesures jusqu'au site $i$ est noté $\hat{\boldsymbol{a}}_k^i$ (et pour alléger au maximum les notations $\hat{\boldsymbol{a}}_k^k \equiv \hat{\boldsymbol{a}}_k$).

Étant donné un estimateur d'un vecteur d'état au site $k$ qui prend en compte les $k-1$ mesures précédentes, on veut trouver un nouvel estimateur qui prend en compte la mesure au site $k$. Afin de ne pas avoir un filtre avec une mémoire croissante, nous allons demander que l'estimateur soit de forme récursive linéaire.

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k = K_k'\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k\boldsymbol{m}_k \tag{5.5}$$

où $K_k'$ et $K_k$ sont des matrices de poids dépendantes du temps, qui seront décrites à la section (5.4.2).
Le principe générale est représenté de manière schématique à la Fig. 5.1.

## 5.4 Filtre de Kalman discret

Le filtre de Kalman est une procédure récursive qui permet d'estimer les paramètres décrivant l'état d'un système à partir d'un ensemble de mesures bruitées. Cette méthode à été développée dans les années 60 et doit son nom à Rudolf Kalman [37].
Nous allons commencer par redériver les équations du filtre, ensuite nous nous intéresserons plus particulièrement à son application à l'ajustement de traces.

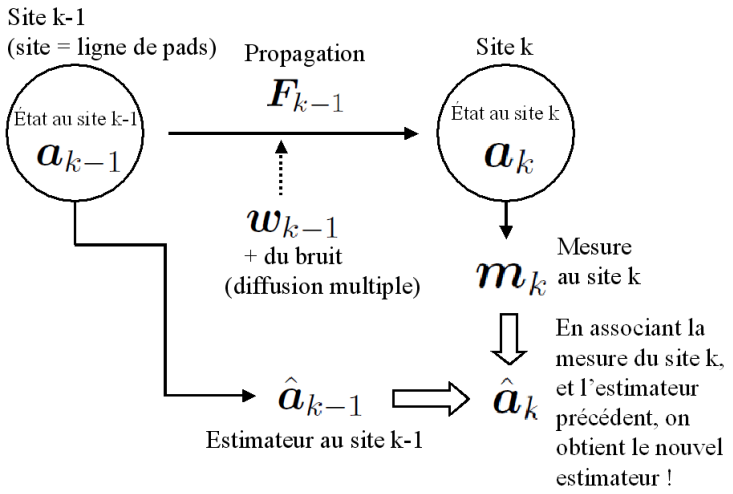


FIGURE 5.1 – Principe du filtre de Kalman.

Il est possible de dériver les équations du filtre de Kalman en optimisant la forme supposée de l'estimateur linéaire Eq.(5.5). Une équation pour l'erreur d'estimation après intégration de la mesure peut être obtenue en reprenant les Eq.(5.5) et (5.4), et en définissant :

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k = \boldsymbol{a}_k + \tilde{\boldsymbol{a}}_k \tag{5.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} = \boldsymbol{a}_k + \tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} \tag{5.7}$$

où les $\tilde{\boldsymbol{a}}_k$ sont les erreurs d'estimation, c'est à dire la différence entre l'estimateur et le vecteur d'état. L'erreur d'estimation est donc décrite par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{a}}_k &= \hat{\boldsymbol{a}}_k - \boldsymbol{a}_k \\
&= K'_k \hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k \boldsymbol{m}_k - \boldsymbol{a}_k \\
&= K'_k(\boldsymbol{a}_k + \tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}) + K_k(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k) - \boldsymbol{a}_k \\
&= (K'_k + K_k \boldsymbol{H}_k - I)\boldsymbol{a}_k + K'_k \tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k \boldsymbol{\epsilon}_k
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Par l'hypothèse faite sur le bruit de mesure, on sait que $E[\boldsymbol{\epsilon}_k] = \mathbf{0}$. Aussi, si $E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}] = \mathbf{0}$, cet estimateur sera non-biaisé (c'est à dire que $E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k] = \mathbf{0}$ par la définition vue à la section (5.2.1) ) si pour tout vecteur d'état $\boldsymbol{a}_k$ donné, le premier terme de l'Eq.(5.8) est nul. On impose donc

$$K'_k = I - K_k \boldsymbol{H}_k$$

L'estimateur (5.5) prend donc la forme :

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k = (I - K_k \boldsymbol{H}_k)\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k \boldsymbol{m}_k$$

ou encore

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k = \hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k(\boldsymbol{m}_k - \boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}) \tag{5.9}$$

Et l'erreur correspondant à cet estimateur, en partant des Eq.(5.2), (5.6), (5.7) et (5.9), est donnée par

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_k = (I - K_k \boldsymbol{H}_k)\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k \boldsymbol{\epsilon}_k \tag{5.10}$$

### 5.4.1 Mise à jour de la matrice de covariance

Nous venons de voir comment évoluait l'estimateur de notre trace. Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution de l'erreur que nous faisons sur cet estimateur lorsque nous ajoutons une mesure. Pour cela nous allons regarder la matrice de covariance de l'erreur.
Par définition la matrice de covariance de l'erreur est donnée par l'expression

$$C_k = E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k \tilde{\boldsymbol{a}}_k^T]$$

Si l'on reprend l'Eq.(5.10), qui nous donne l'expression de l'erreur, et qu'on l'injecte dans la définition de la matrice de covariance, on peut réexprimer cette matrice sous la forme suivante

$$\begin{aligned} C_k = E[(I - K_k \boldsymbol{H}_k)\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} \left((\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1})^T (I - K_k \boldsymbol{H}_k)^T + \boldsymbol{\epsilon}_k^T K_k^T\right) \\ + K_k \boldsymbol{\epsilon}_k \left((\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1})^T (I - K_k \boldsymbol{H}_k)^T + \boldsymbol{\epsilon}_k^T K_k^T\right)] \end{aligned}$$

On définit aussi la matrice de covariance pour les $\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}$, ainsi que pour les erreurs de mesure $\boldsymbol{\epsilon}_k$

$$\begin{aligned} C_k^{k-1} &\equiv E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}(\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1})^T] \\ R_k &\equiv E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] \end{aligned} \tag{5.11}$$

Et comme les erreurs de mesure sont supposées non-correllées, nous avons que

$$E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} \boldsymbol{\epsilon}_k^T] = E[\boldsymbol{\epsilon}_k (\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1})^T] = 0$$

Donc finalement, avec toutes ces définitions, la matrice de covariance de l'erreur peut être réexprimée plus simplement comme

$$\begin{aligned} C_k &= (I - K_k \boldsymbol{H}_k) E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} (\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1})^T] (I - K_k \boldsymbol{H}_k)^T + K_k E[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_k^T] K_k^T \\ &= (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1} (I - K_k \boldsymbol{H}_k)^T + K_k R_k K_k^T \end{aligned} \tag{5.12}$$

### 5.4.2 Choix optimal de la matrice de poids $K_k$

Le critère pour optimiser le choix de la matrice de poids $K_k$ est de minimiser la somme du carré de la déviation. Ce qui revient, dans notre cas, à minimiser la trace de la matrice de covariance de l'erreur ($C_k$).

$$\frac{\partial Tr[C_k]}{\partial K_k} = 0$$

Lorsque l'on résout pour $K_k$, cela nous donne (voir Annexe A) :

$$K_k = C_k^{k-1} \boldsymbol{H}_k^T (\boldsymbol{H}_k C_k^{k-1} \boldsymbol{H}_k^T + R_k)^{-1} \tag{5.13}$$

Qui est appelée la *matrice de gain de Kalman.*
En reprenant l'Eq.(5.12) et l'expression de la matrice de gain, nous pouvons réexprimer la matrice de covariance de l'erreur (voir Annexe B) :

$$C_k = (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1} \tag{5.14}$$

Ce qui optimise la valeur de la matrice de covariance de l'erreur après la mise à jour de la nouvelle mesure.
Nous avons donc exprimé la mise à jour de l'estimateur et de sa matrice de covariance de l'erreur pour chaque nouvelle mesure de manière récursive. Il ne reste plus qu'à exprimer l'évolution de ces deux quantités entre deux mesures.

### 5.4.3 Extrapolation au site suivant

Pour extrapoler le vecteur d'état du site $k-1$, au site $k$, nous avions l'équation de propagation Eq.(5.3), mais avant de faire l'observation au site $k$, nous n'avons aucune information sur la partie aléatoire. Ce qu'on peut faire de mieux, c'est donc extrapoler l'estimateur en utilisant uniquement le premier terme de l'équation de propagation.

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} = \boldsymbol{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{a}}_{k-1} \tag{5.15}$$

Pour ce qui est de l'extrapolation de la matrice de covariance, il suffit de reprendre la définition Eq.(5.11), puis de l'exprimer en terme de la matrice de covariance au site $k-1$ ($C_{k-1}$) en utilisant les équations de propagation de l'estimateur Eq.(5.15) et du vecteur d'état Eq.(5.3). Ce qui donne

$$\begin{aligned}
C_k^{k-1} &\equiv E[\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}(\tilde{\boldsymbol{a}}_k^{k-1})^T] \\
&= E[(\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} - \boldsymbol{a}_k)(\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} - \boldsymbol{a}_k)^T] \\
&= E[(\boldsymbol{F}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1}) - \boldsymbol{F}_{k-1}(\boldsymbol{a}_k) - \boldsymbol{w}_{k-1})(\boldsymbol{F}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1}) - \boldsymbol{F}_{k-1}(\boldsymbol{a}_k) - \boldsymbol{w}_{k-1})^T] \\
&= E[(\boldsymbol{F}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1} - \boldsymbol{a}_{k-1}) - \boldsymbol{w}_{k-1})(\boldsymbol{F}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1} - \boldsymbol{a}_{k-1}) - \boldsymbol{w}_{k-1})^T] \\
&= \boldsymbol{F}_{k-1}E[(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1} - \boldsymbol{a}_{k-1})(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1} - \boldsymbol{a}_{k-1})^T]\boldsymbol{F}_{k-1}^T + E[\boldsymbol{w}_{k-1}\boldsymbol{w}_{k-1}^T] \\
&\quad + \text{les termes croisés} \\
&= \boldsymbol{F}_{k-1}C_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^T + Q_{k-1} \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Les termes croisés disparaissent puisque nous avons supposé que les erreurs de mesures sont non-corrélées.

### 5.4.4 Forme simplifiée de la matrice de gain $K_k$

On peut exprimer la matrice inverse de $C_k$ comme

$$C_k^{-1} = (C_k^{k-1})^{-1} + \boldsymbol{H}_k^T R_k^{-1} \boldsymbol{H}_k \qquad (5.17)$$

Ce qui se démontre très facilement en partant de l'Eq.5.14 et en vérifiant $C_k C_k^{-1} = I$. On peut utiliser ce résultat pour réécrire la matrice de gain (5.13) sous la forme :

$$\begin{aligned}
K_k &= \left(C_k C_k^{-1}\right) C_k^{k-1}\boldsymbol{H}_k^T \left(\boldsymbol{H}_k C_k^{k-1}\boldsymbol{H}_k^T + R_k\right)^{-1} \\
&= C_k \left((C_k^{k-1})^{-1} + \boldsymbol{H}_k^T R_k^{-1}\boldsymbol{H}_k\right) C_k^{k-1}\boldsymbol{H}_k^T \left(\boldsymbol{H}_k C_k^{k-1}\boldsymbol{H}_k^T + R_k\right)^{-1} \\
&= C_k\boldsymbol{H}_k^T \left(I - R_k^{-1}\boldsymbol{H}_k C_k^{k-1}\boldsymbol{H}_k^T\right) \left(\boldsymbol{H}_k C_k^{k-1}\boldsymbol{H}_k^T + R_k\right)^{-1} \\
&= C_k\boldsymbol{H}_k^T R_k^{-1} \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

Qui est la forme simplifiée que nous cherchions.

## 5.5 Application du filtre de Kalman à l'ajustement de traces

Nous allons décrire à présent l'utilisation du filtre de Kalman pour la reconstruction de la trajectoire desparticules chargées dans le cadre d'expériences auprès de collisionneurs.
Dans les expériences de physiques des particules installées auprès des collisionneurs, le détecteur de trace, appelé trajectographe, est généralement de forme cylindrique, entourant le point d'interaction, et est généralement plongé dans un champ magnétique produit par un solénoïde.
Le trajectographe est constitué d'une série de couches de mesures qui permettent d'obtenir la position de la particule sur des points discrets tout au long de sa trajectoire.
Nous allons commencer par rappeler les quelques équations clé de la méthode et comment étendre la méthode dans un cas non-linéaire. Nous expliciterons ensuite les différents termes des équations dans le cadre d'une reconstruction de traces pour un détecteur à gaz.

### 5.5.1 Équations du filtre de Kalman étendu

Il est à noter que dans le cas général, la fonction de propagation, ainsi que la fonction de mesure, ne sont pas linéaires. Dans ce cas, il faut utiliser la méthode du filtre de Kalman étendu.
Si les fonctions de propagation et de mesure ne sont pas linéaire, on ne peut pas, contrairement au cas linéaire vu précédemment, les exprimer comme des matrices. Dans les équations d'analyse et de prédiction de l'estimateur, il faut donc garder l'expression explicite des fonctions de propagation ($\boldsymbol{f}_k(\hat{\boldsymbol{a}}_k)$) et de mesure ($\boldsymbol{h}_k(\hat{\boldsymbol{a}}_k)$). Pour la mise à jour et la prédiction, on ne peut pas garder l'expression complète de ces fonctions, il faut donc les linéariser en effectuant une expansion en série de Taylor au premier ordre.
Nous allons donc maintenant reformuler les deux étapes du filtre de Kalman dans le cas non-linéaire : l'analyse et la propagation
L'analyse est l'étape de la méthode qui permet de réexprimer l'estimateur en tenant compte d'une nouvelle mesure. l'Eq.(5.9) dans le cas du filtre de Kalman étendu devient :

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k = \hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} + K_k \left( \boldsymbol{m}_k - \boldsymbol{h}_k \left( \hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} \right) \right) \tag{5.19}$$

Un fois que nous avons mis à jour l'estimateur, il faut recalculer sa matrice de covariance. La relation qui donne la mise à jour de cette matrice est la suivante Eq(5.17) :

$$C_k = \left[(C_k^{k-1})^{-1} + \boldsymbol{H}_k^T R_k^{-1} \boldsymbol{H}_k\right]^{-1}$$

où $\boldsymbol{H}_k$ est la matrice de projection dans l'espace des mesures, et est définie comme :

$$\boldsymbol{H}_k \equiv \left( \frac{\partial \boldsymbol{h}_k \left(\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1}} \right)$$

qui est l'expression de la série de Taylor au premier ordre de la fonction de mesure. Comme le montre l'Eq.(5.19), le nouvel estimateur est en fait une combinaison pondérée de l'estimateur avant la mesure et de la mesure elle-même. Cette pondération est donnée par la matrice de gain de Kalman (Eq.(5.18) ).

Une fois que nous avons ce nouvel estimateur, ainsi que sa matrice de covariance, il faut propager les paramètres jusqu'au site de mesure suivant. C'est ce qu'on appelle l'étape de prédiction. L'estimateur venant du site $k-1$ et arrivant au site $k$ mais avant la mesure s'exprime grâce à l'équation de mouvement

$$\hat{\boldsymbol{a}}_k^{k-1} = \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1}\right)$$

qui est l'équivalant de l'Eq.(5.15) dans le cas non-linéaire.
La matrice de covariance, qui doit aussi être propagée du site $k-1$ au site $k$, se réexprime sous la forme Eq.(5.16)

$$C_k^{k-1} = \boldsymbol{F}_{k-1} C_{k-1} \boldsymbol{F}_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

où $\boldsymbol{F}_{k-1}$ est la matrice de propagation, et est définie comme :

$$\boldsymbol{F}_{k-1} \equiv \left( \frac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}\left(\hat{\boldsymbol{a}}_{k-1}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{a}}_{k-1}} \right)$$

Pour résumer de manière schématique le principe du filtre, on procède de manière récursive à une comparaison entre la mesure du détecteur et l'estimateur précédent cette mesure, afin de minimiser la matrice de covariance des erreurs. Puis, on propage les paramètres de l'estimateur ainsi que les paramètres de sa matrice de covariance jusqu'au site de mesure suivant, et ce jusqu'à la dernière couche de mesure.

Maintenant que nous avons réécrit les équations du filtre dans le cas non-linéaire, il faut développer les différents termes des équations dans le cadre qui nous intéresse,

c'est à dire l'ajustement de traces. Nous allons commencer par expliciter le vecteur d'état que nous voulons estimer ainsi que son équation du mouvement dans le cas de la reconstruction de traces de particules chargées en mouvement dans un champ magnétique.

### 5.5.2 Le vecteur d'état et la fonction de propagation

Nous allons expliciter le vecteur d'état de notre trace. Pour commencer il faut donc un modèle décrivant le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique, ce qui donnera la forme explicite de la fonction de propagation.
Le champ magnétique étant uniforme et dans la direction de l'axe $z$ (perpendiculaire au plan d'anodes), nous pouvons faire l'approximation d'une trajectoire hélicoïdale [38] :

$$\begin{cases} x = x_0 + d_\rho \cos\phi_0 + \dfrac{\alpha}{\kappa}(\cos\phi_0 - \cos(\phi_0 + \phi)) \\ y = y_0 + d_\rho \sin\phi_0 + \dfrac{\alpha}{\kappa}(\sin\phi_0 - \sin(\phi_0 + \phi)) \\ z = z_0 + d_z - \dfrac{\alpha}{\kappa}\tan(\lambda.\phi) \end{cases} \tag{5.20}$$

où $\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0, z_0)^T$ est un point arbitraire appelé point pivot par rapport auquel l'hélice est définie et $\phi$ est l'angle de déflexion mesuré à partir du point pivot. Comme le point pivot est un point de référence arbitraire, nous pouvons prendre le point de mesure du site précédent.
A un site donné, ou de manière équivalente, à un point pivot donné, l'hélice est donc décrite par cinq paramètres représentés à la Fig. 5.2 :

$$\begin{cases} d_\rho : \text{distance entre l'hélice et le point pivot dans le plan } x-y \\ \phi_0 : \text{angle azimutal du point pivot par rapport au centre de l'hélice} \\ \kappa : \equiv Q/P_t \text{ le rapport entre la charge et l'impulsion transverse} \\ d_z : \text{distance entre l'hélice et le point pivot dans la direction } z \\ \tan\lambda : \text{angle entre l'hélice et le plan } x-y \end{cases} \tag{5.21}$$

ce qui forme un vecteur d'état $\boldsymbol{a}_k = (d_\rho, \phi_0, \kappa, d_z, \tan\lambda)^T$. Le paramètre $\kappa$ est relié au rayon de l'hélice ($\rho$) par la relation $\rho = \alpha/\kappa$, où $\alpha$ est une constante donnée en

termes de la vitesse de la lumière ($c$) et du champ magnétique ($B$) : $\alpha \equiv 1/cB$.

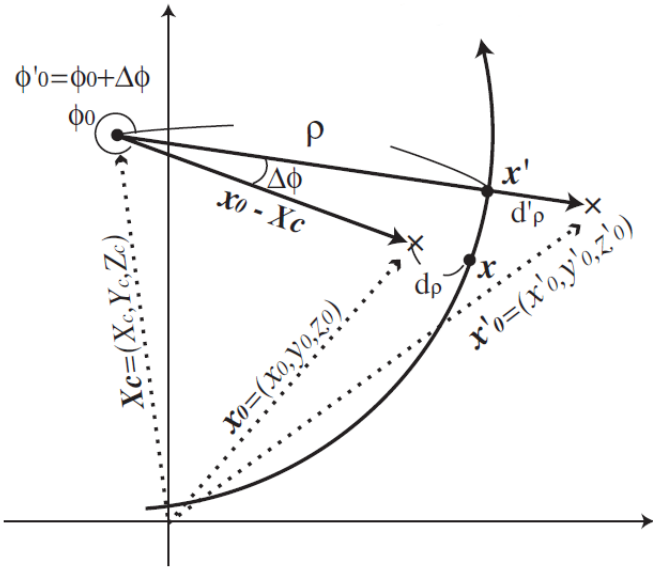


FIGURE 5.2 – Relation entre les paramètres de la trace et le point pivot.

Il est à noter que le changement du point pivot du site $k-1$ au site $k$ change le vecteur d'état, c'est à dire les paramètres de l'hélice, sans changer l'hélice elle-même. Lorsque le vecteur d'état $\boldsymbol{a}_{k-1}$ passe du site de mesure $k-1$ au site $k$, il devient le vecteur d'état $\boldsymbol{a}_{k-1}^{k}$ suivant le changement du point pivot. C'est donc la transformation du point pivot qui détermine la fonction de propagation $\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1})$. Explicitons maintenant le changement du vecteur d'état au site de mesure $k-1$ ,

$$\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}_{k-1} = (d_\rho, \phi_0, \kappa, d_z, \tan\lambda)^T,$$

lorsque nous changeons de point pivot. Le vecteur d'état pour ce nouveau point pivot est donné par l'expression

$$\boldsymbol{a'} \equiv \boldsymbol{a}_{k-1}^{k} = (d'_\rho, \phi'_0, \kappa', d'_z, \tan\lambda')^T = \boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1})$$

où les relations entre les paramètres de l'hélice sont données par

$$\begin{cases} d'_\rho = (X_c - x'_0)\cos\phi'_0 + (Y_c - y'_0)\sin\phi'_0 - \dfrac{\alpha}{\kappa} \\ \\ \phi'_0 = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{Y_c - y'_0}{X_c - x'_0}\right) & (\kappa > 0) \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y'_0 - Y_c}{x'_0 - X_c}\right) & (\kappa > 0) \end{cases} \\ \\ \kappa' = \kappa \\ \\ d'_z = z_0 - z'_0 + d_z - \dfrac{\alpha}{\kappa}(\phi'_0 - \phi_0)\tan\lambda \\ \\ \tan\lambda' = \tan\lambda \end{cases} \tag{5.22}$$

où $\boldsymbol{x}$ est un point de l'hélice, $\boldsymbol{x}_0$ un point pivot et $\boldsymbol{X}_c$ le centre de l'hélice qui est donné par la relation

$$\begin{cases} X_c \equiv x_0 + (d\rho + \dfrac{\alpha}{\kappa})\cos\phi_0 \\ Y_c \equiv y_0 + (d\rho + \dfrac{\alpha}{\kappa})\sin\phi_0 \end{cases} \tag{5.23}$$

Les Eq.(5.22) et Eq.(5.23) définissent la fonction de propagation $\boldsymbol{f}_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1})$ pour le vecteur d'état.
Pour calculer la matrice de propagation $\boldsymbol{F_{k-1}}$ il faut calculer les dérivées partielles de l'Eq.(5.22) par rapport au vecteur d'état $\boldsymbol{a} = (d_\rho, \phi_0, \kappa, d_z, \tan\lambda)^T$

$$\boldsymbol{F}_{k-1} \equiv \left(\frac{\partial \boldsymbol{a'}}{\partial \boldsymbol{a}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial d'_\rho}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \\ \dfrac{\partial \phi'_0}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \\ \dfrac{\partial \kappa'}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \\ \dfrac{\partial d'_z}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \\ \dfrac{\partial \tan\lambda'}{\partial \boldsymbol{a}} \end{pmatrix}$$

### 5.5.3 Diffusion multiple

Nous allons à présent discuter de la contribution aléatoire de l'équation du mouvement, $\boldsymbol{w}_{k-1}$. Dans le cadre qui nous intéresse, cette contribution aléatoire est due à la diffusion multiple coulombienne , entre le site de mesure $k-1$ et le site $k$.
Il est à noter que dans l'expression de la matrice de covariance des erreurs propagées (Eq.(5.16)) l'effet de la contribution aléatoire apparaît sous la forme de sa matrice de covariance $Q_{k-1}$. Cette dernière dépend bien évidement de la distribution de matière entre les sites de mesure $k-1$ et $k$.
Nous allons commencer par supposer que la distance entre deux sites de mesure est suffisamment petite pour pouvoir faire l'approximation que la diffusion multiple est due à une plaque, de largeur infinitésimale, située à un point $m$ entre les deux sites $(m\,;k-1<m<k)$ et qui contient toute la matière entre les deux sites. Dans cette limite la matrice de covariance extrapolée est équivalente à la matrice de covariance au point $m$, c'est à dire $Q_m$. Dans cette limite, on peut montrer que la matrice prend une forme assez simple [38] :

$$Q_m = \theta_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\tan^2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\kappa\tan\lambda)^2 & 0 & \kappa\tan\lambda(1+\tan^2\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa\tan\lambda(1+\tan^2\lambda) & 0 & (1+\tan^2\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

où $\kappa$ et $\tan\lambda$ sont, théoriquement, les valeurs au point $m$ ; mais nous n'avons aucune information à ce point. Nous allons donc faire l'approximation que ces valeurs sont celles du site $k-1$ (ce qui est consistant avec l'approximation d'une petite distance entre les deux site). Le $\theta_0$ est donné par la forme habituelle (voir section 2.3.4) :

$$\theta_0 = \frac{13.6MeV}{\beta cp} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln\left(\frac{x}{X_0}\right)\right]$$

où $P$ est l'impulsion de la particule, $\beta$ sa vitesse exprimée en unité de vitesse de la lumière, et $X_L$ la largeur du plan de diffusion en unité de longueur de radiation.
Nous avons donc la matrice de covariance au point $m$. Il faut maintenant la propager jusqu'au site $k$. Il ne faut évidement plus tenir en compte la partie aléatoire de l'équation de propagation (puisque toute la matière est supposée concentrée au point

$m$), ce qui nous donne donc l'expression suivante

$$Q_{k-1} = \boldsymbol{F}_{m,k} Q_m \boldsymbol{F}_{m,k}^T$$

où $\boldsymbol{F}_{m,k}$ est la matrice de propagation pour la matrice de covariance du vecteur d'état du point $m$ jusqu'au site $k$.
Nous avons donc réussi à exprimer la matrice de covariance de la contribution aléatoire dans le cas où la distance entre deux sites de mesure est suffisamment petite. Si la distance entre les deux sites est trop grande pour faire l'approximation expliquée ci-dessus, nous allons subdiviser cette distance en $N$ parties, afin de se remettre dans les conditions de l'approximation, et ensuite sommer les $N-1$ différentes contributions :

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{F}_{m_i,k} Q_{m_i} \boldsymbol{F}_{m_i,k}^T$$

### 5.5.4 Équation de la mesure et projection

Nous allons maintenant terminer cette section en explicitant les termes de l'équation de mesure Eq.(5.2)

$$\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{h}_k \left( \boldsymbol{a}_k \right) + \boldsymbol{\epsilon}_k$$

où $m_k$, le vecteur de mesure, est un ensemble de coordonnées mesurées par le détecteur au site $k$. Nous allons commencer par expliciter le passage du vecteur d'état au vecteur de mesure. Cette mesure n'étant jamais parfaite, il faudra ensuite expliciter l'erreur qu'apporte le détecteur sur la mesure.
Les mesures étant des points discrets le long de la trajectoire de la particule, nous pouvons voir les sites de mesure comme étant une série de surface virtuelle sur lesquels on mesure la position. Chaque couche de mesure correspond à un site de mesure qui va enregistrer les coordonnées d'intersection entre la trajectoire et la surface.
Le passage du vecteur d'état au vecteur de mesure se fait grâce au projeteur $\boldsymbol{h}_k \left( \boldsymbol{a}_k \right)$. Ce projecteur nous donne les coordonnées exactes du point de mesure au site $k$ comme une fonction des paramètres du vecteur d'état. Pour pouvoir expliciter ce projecteur, il faut commencer par avoir une équation qui nous donne l'intersection, $\boldsymbol{x}_k \left( \boldsymbol{a} \right)$ d'une trace $\boldsymbol{a}$ avec la surface de mesure $S_k(\boldsymbol{x}) = 0$ :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_k \left( \boldsymbol{a} \right) = \boldsymbol{x} \left( \phi_k(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a} \right)$$

où $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\phi, \boldsymbol{a})$ est l'équation de la trajectoire qui nous est donnée par l'Eq.(5.20), et $\phi_k(\boldsymbol{a})$ est l'angle de déflexion auquel le point de mesure de la surface correspond au site $k$.
Il faut aussi une équation qui transforme l'intersection $\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{a})$ en le vecteur de mesure :

$$\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{m}_k(\boldsymbol{x}_k)$$

Pour définir le projecteur, il suffit maintenant de combiner ces deux équations, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{m}_k(\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{a})) \\ &= \boldsymbol{m}_k(\boldsymbol{x}(\phi_k(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Maintenant que nous avons défini le projecteur, nous pouvons expliciter la matrice de projection par rapport à cette définition. Nous avons vu que dans le cas du filtre de Kalman étendu, la matrice de projection était définie comme la dérivée partielle du projecteur par rapport au vecteur d'état de la trace, ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{H}_k \equiv \frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{a}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{m}_k}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(\phi_k(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right)$$

Nous allons regarder d'un peu plus près le membre de droite de cette équation, afin de l'exprimer en terme connus.
Le premier terme $(\partial \boldsymbol{m}_k/\partial \boldsymbol{x})$ est déterminé par la géométrie de la surface de mesure, ainsi que le système de coordonnées de la couche de mesure.
Le deuxième terme de ce membre de droite peut être exprimé comme

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}(\phi_k(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial \boldsymbol{a}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{a}}$$

où l'on a juste développé la dérivée. Dans cette expression il y a deux termes $(\partial \boldsymbol{x}/\partial \phi_k$ et $\partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{a})$ qui sont déterminés en résolvant l'équation pour la trajectoire.
Il reste donc le terme $\partial \phi_k/\partial \boldsymbol{a}$ qu'il faut encore réexprimer. Pour ce faire nous allons partir de l'équation pour la surface, qui contient $\phi_k$

$$S_k(\boldsymbol{x}(\phi_k, \boldsymbol{a})) = 0$$

Nous allons prendre la dérivée partielle par rapport au vecteur des paramètres de la trace, ce qui nous donne

$$0 = \frac{\partial S_k}{\partial \boldsymbol{a}} = \frac{\partial S_k}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \phi_k}\frac{\partial \phi_k}{\partial \boldsymbol{a}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{a}}\right)$$

Et pour finir, il suffit d'inverser la relation pour obtenir une expression pour $\partial\phi_k/\partial\boldsymbol{a}$

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial\boldsymbol{a}} = -\left(\frac{\partial S_k}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{a}}\right) / \left(\frac{\partial S_k}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\phi_k}\right)$$

Nous avons donc réexprimé notre matrice de projection en terme calculable à partir de l'équation de la trajectoire, ainsi que la géométrie du détecteur.

Il ne nous reste plus qu'à exprimer la matrice de covariance de l'erreur de mesure ($V_k$). Nous allons commencer par définir le vecteur de résidu de la mesure. Le vecteur de résidu de la mesure est la différence entre la mesure du détecteur et de la projection du vecteur des paramètres de la trace dans l'espace des mesures :

$$\Delta\boldsymbol{m}_k \equiv \boldsymbol{m}_k - \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{a}_k)$$

A partir de cette définition, nous pouvons écrire une matrice de covariance, qui est bien celle que nous cherchons

$$\boldsymbol{V}_k \equiv < \Delta\boldsymbol{m}_k \Delta\boldsymbol{m}_k^T >$$

Si nous sommes dans le cas où l'on mesure deux coordonnées, statistiquement indépendantes, sur la surface de mesure au site $k$, nous pouvons écrire la matrice de covariance sous forme diagonale :

$$\boldsymbol{V}_k = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ & \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

où $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont les résolutions respectives des deux coordonnées.

## 5.6 Implémentation

Dans le cadre des logiciels officiels de simulation et de reconstruction développés par la collaboration étudiant les nouveaux concepts de grandes TPC à microstructures, il n'existe, à l'heure actuelle, encore aucun programme de reconstruction de traces complètement opérationnel.
De plus, les logiciels, développés pour les TPC et regroupés dans un projet appelé MarlinTPC [39], sont généralement implémentés pour décrire les détecteurs tels qu'ils sont envisagés dans des expériences auprès de collisionneurs et non pour des prototypes qui sont testés avec des faisceaux de particules.

Pour l'implémentation du filtre de Kalman utilisé dans ce travail, nous nous sommes basés sur un programme existant, KalTest [40], écrit en C++ et interfacé avec le logiciel orienté objet ROOT [41] largement utilisé dans la communauté des physiciens des particules pour l'analyse de données.
Dans ce cadre, il a été nécessaire d'adapter plusieurs parties du filtre pour pouvoir l'appliquer sur les données prises avec le grand prototype et un faisceau de particules (géométrie du détecteur, format des données, etc).

Pour commencer, il faut fournir au filtre des valeurs initiales du vecteur d'état et de la matrice de covariance. Dans notre cas, le vecteur d'état initial est obtenu en déterminant une hélice à partir de trois mesures : celle de la première ligne de détection, de la dernière ligne, et de la ligne du centre. Cette méthode n'est pas un ajustement car il n'y a pas de degrés de liberté : on utilise 9 coordonnées pour déterminer 5 paramètres dans un espace à 3 dimensions. Par conséquent, il n'est pas possible d'estimer les erreurs sur les paramètres initiaux de la trace. La matrice de covariance est initialisée avec des erreurs arbitrairement larges, pour que les valeurs initiales des paramètres n'aient qu'un faible poids dans les estimations ultérieurs du vecteur d'état.

Dans le cadre de notre analyse, nous n'avons utilisé que les coordonnées du plan transverse, alors que la TPC permet une reconstruction 3D des trajectoires des particules chargées. Ce choix est motivé par le fait que durant les tests, le faisceau de particules est parallèle au plan d'anodes.

Tout au long de ce travail, les performances du filtre de Kalman ont été comparées à celles obtenues avec un ajustement global utilisant la méthode des moindres carrés (voir section 5.2.2). Cet ajustement utilise un polynôme du deuxième degré pour reconstruire les trajectoires dans le plan transverse.

Outre l'étude des performances du filtre de Kalman pour la reconstruction des traces enregistrés avec une grande TPC, la mise en place de cette technique est également un des objectifs importants de ce travail. En effet, le filtre de Kalman est actuellement envisagé pour devenir un des outils standards de reconstruction de traces des futures grandes TPC à micropads.

## 5.7 Résultats

Pour évaluer les performances du filtre de Kalman que nous avons implémenté, nous allons à présent discuter des résultats obtenus pour la résolution spatiale du détecteur et les comparer à ceux obtenus avec la méthode des moindres carrés.

### 5.7.1 Mise au point des méthodes de reconstruction

Pour mettre au point et tester les méthodes de reconstruction de traces que nous avons implémentées, nous les avons d'abord testées avec des données simulées.
Travailler avec des données simulées permet de vérifier que le code implémenté reconstruit correctement la trajectoire des particules simulées ainsi que la résolution du détecteur. En effet, comme nous connaissons les paramètres de la trajectoire simulée, il est aisé de vérifier que l'algorithme de reconstruction n'introduit pas de biais systématique.

Pour simuler une particule qui traverse le détecteur parallèlement au plan d'anodes et se déplaçant le long de la colonne centrale, nous avons simulé une série de 24 hits dans le détecteur, une mesure par ligne.
Les positions des hits ont donc été calculées en prenant l'intersection d'un cercle d'un rayon de 6 $m$ (ce qui correspond à une impulsion transverse de 1.8 $GeV/c$ dans un champ magnétique de 1 $T$), avec les 24 lignes d'anodes. Une fois ces 24 intersections calculées, nous avons effectué, pour chacun des hits, un déplacement aléatoire suivant une gaussienne d'écart type de 2 $\mu m$, pour simuler des petites erreurs de mesures. Les effets de la diffusion multiple ne sont pas considérés dans cette simulation.
Sur base de ces 24 hits simulés, nous avons pu reconstruire les trajectoires des particules simulées par les deux méthodes.

Le premier test que nous avons effectué, consiste à vérifier que le rayon de courbure de la trajectoire est correctement reconstruit. La Fig. 5.3 montre la différence entre rayon reconstruit (Rreco) et le rayon simulé (Rsim).

Nous avons ajusté une gaussienne sur cette distribution et on voit que la moyenne de cette gaussienne est compatible avec zéro, ce qui montre que l'on reconstruit correctement le rayon par la méthode du filtre de Kalman et que l'erreur pour ce rayon reconstruit est d'environ 0.25%. Autrement dit le rayon de courbure de 6 $m$ est reconstruit avec une incertitude de 15 $mm$, en ajustant seulement $\sim$ 17 $cm$ de la circonférence.

La Fig. 5.4 représente la différence entre la position du hit simulé (Xsim) et la position de la trace reconstruite par le filtre de kalman (Xtrace) sur une ligne, en l'occurrence la ligne 12.

Cette distribution est appelée la distribution des résidus. Le biais et la résolution spatiale sont évalués à partir de la moyenne et de la déviation standard d'une gaussienne ajustée sur la distribution des résidus.
La distribution est bien gaussienne avec une déviation standard proche de 2 $\mu m$,

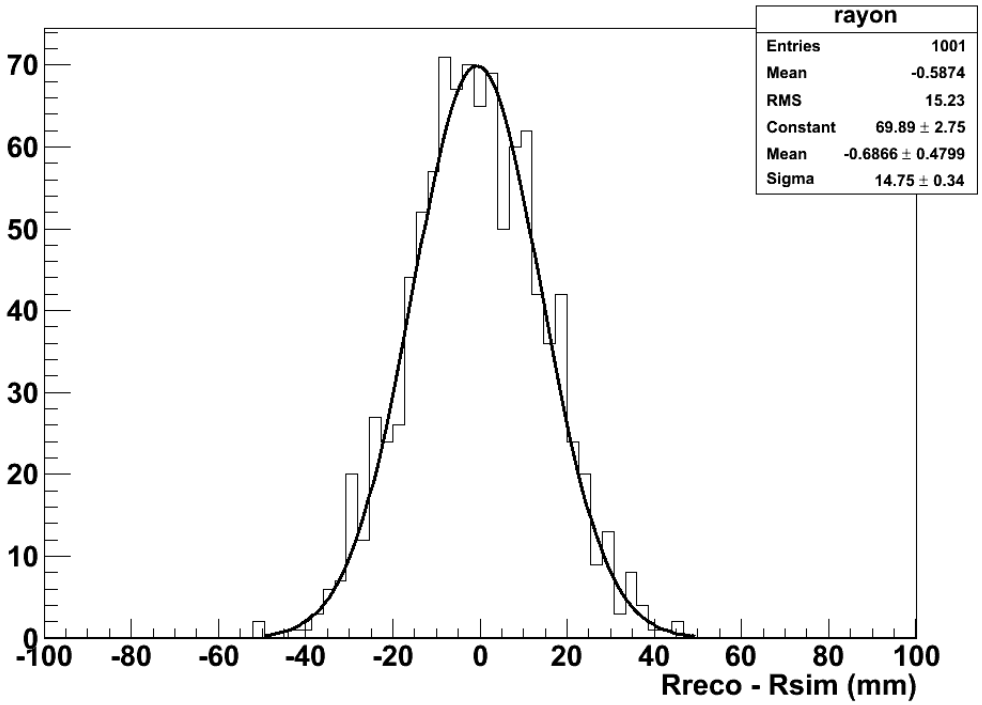


FIGURE 5.3 – Distribution de la différence entre le rayon reconstruit (Rreco) par filtre de Kalman et le rayon simulé (Rsim).

c'est à dire la déviation aléatoire introduite dans la simulation.

Pour s'assurer du bon fonctionnement des deux méthodes d'ajustement sur toute la longueur du détecteur, la moyenne (le biais) et la déviation standard (sigma) de la gaussienne ajustée sur la distribution des résidus (Xsim-Xtrace) de chaque ligne sont représentées aux Fig. 5.5 et 5.6 respectivement, où la figure du haut montre les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés et la figure du bas ceux obtenus avec le filtre de Kalman.

Il est à noter que la numérotation des lignes commence à zéro, et que certaines lignes ont été éliminées : les lignes $0, 11, 14, 22$ et 23.
Les lignes $0, 11$ et 23 ont été éliminées car ce sont les trois points qui servent à calculer le premier estimateur du filtre de Kalman, ce qui a pour effet de biaiser les résidus de ces trois lignes (voir section 5.6).
Le détecteur que nous allons étudier par la suite ayant deux lignes "bruyantes" (14 et 22), ces deux lignes ne seront pas prises en compte dans l'analyse. Par conséquent, nous avons préféré nous mettre dans les mêmes conditions pour la simulation.

On peut voir sur les Fig. 5.5 a) et b) que les moyennes sont compatibles avec zéro

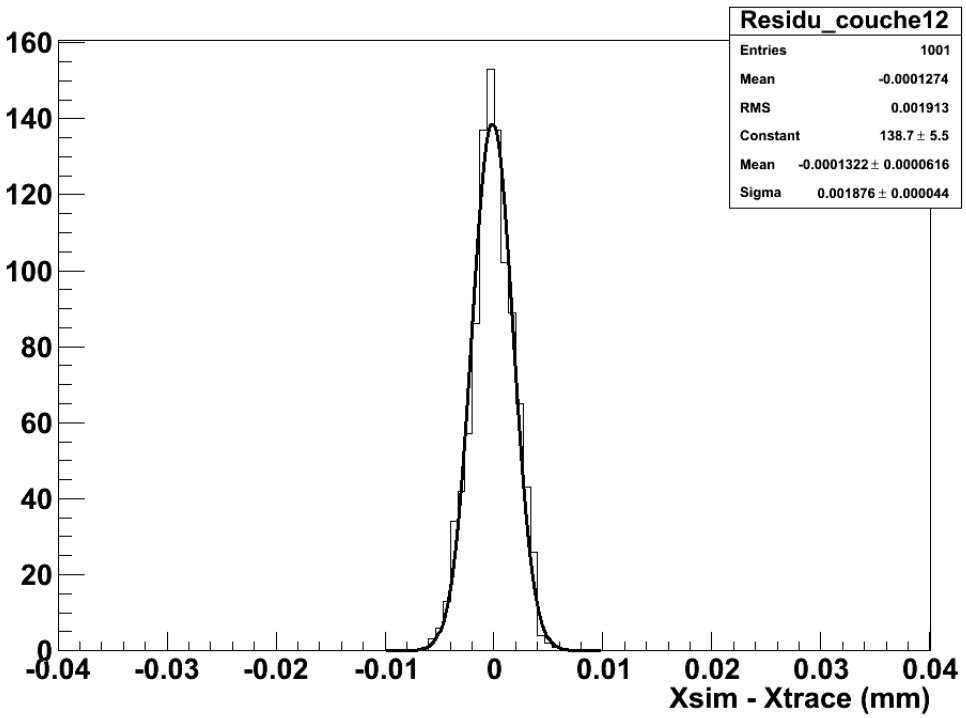


FIGURE 5.4 – Distribution des résidus entre la position du hit simulé (Xsim) et la position de la trace reconstruite avec le filtre de Kalman (Xtrace) sur une ligne (ligne 12 dans ce cas).

et qu'il n'y a donc pas d'effet systématique dans les deux méthodes de reconstruction.

Sur les Fig. 5.6 a) et b), on peut voir que la résolution pour les deux méthodes de reconstruction de traces est un peu en deçà de 2 $\mu m$, or nous nous attendions à retrouver les 2 $\mu m$ de l'écart-type de la distribution gaussienne du déplacement aléatoire des hits simulés.
En fait, lorsque nous faisons la reconstruction de traces, nous biaisons les résidus par le fait de ne pas exclure le point de mesure dont on calcule le résidu. Le fait d'inclure dans l'ajustement le point de mesure dont on veut calculer le résidu va avoir pour effet de sous-estimer la valeur de ce résidu, et donc cela va sur-estimer légèrement la résolution spatiale.
Au contraire ajuster une trace en excluant le point de mesure va sur-estimer la valeur du résidu et donc sous-estimer la résolution.
Pour avoir une valeur non-biaisée de la résolution, il faut prendre la moyenne géométrique de ces deux valeurs (la résolution sans exclure et la résolution en excluant). Cette méthode sera appliquée pour le calcul de la résolution finale.

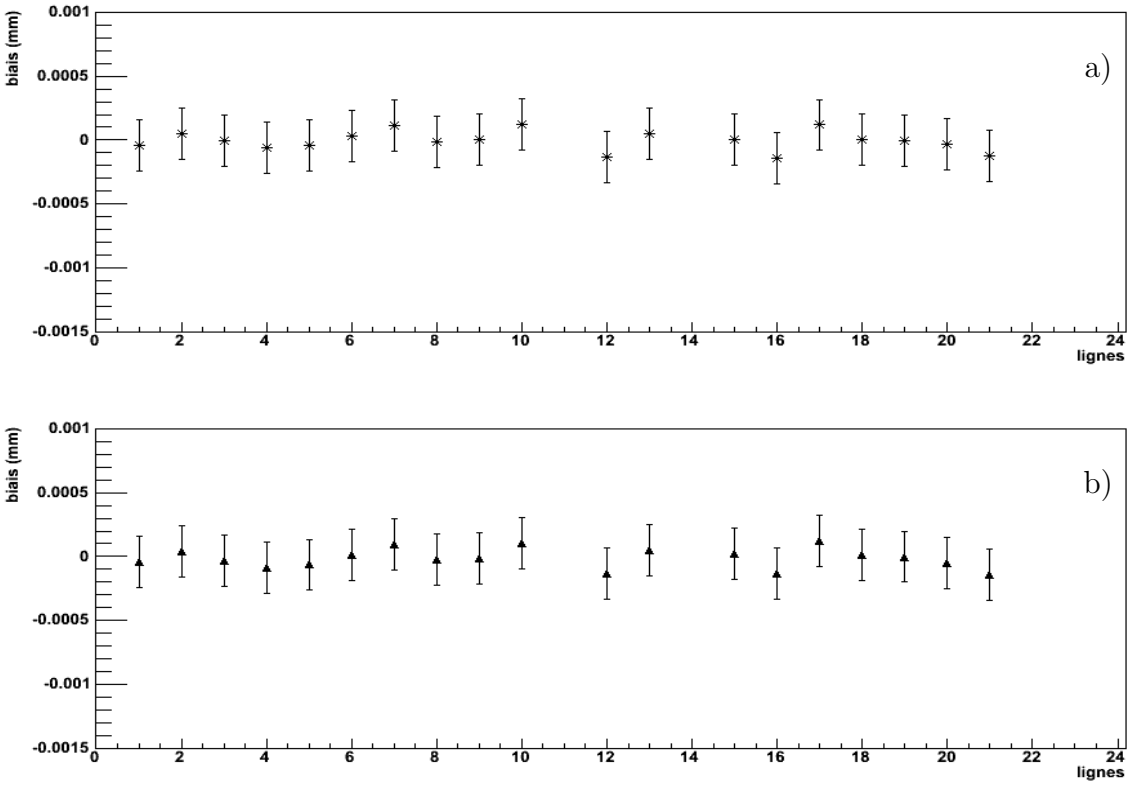


FIGURE 5.5 – a) Le biais pour les traces ajustées par la méthode des moindres carrés sur les données simulées. b) Le biais pour les traces ajustées par la méthode du filtre de Kalman sur les données simulées.

### 5.7.2 Données des tests en faisceau de mars 2010

Une fois convaincu de la fiabilité de nos deux méthodes de reconstruction de traces, nous les avons appliquées sur les vraies données. Les données que nous avons utilisées pour cette analyse ont été enregistrées en mars 2010 avec le module Micromegas recouvert d'une couche de kapton résistif de 5 $M\Omega$ (voir section 4.4).
Grâce à la table mobile nous avons fait une étude de la résolution pour 9 séries de données prises à 9 distances de dérive différentes entre 3 et 50 $cm$. Dans un premier temps nous allons discuter des résultats obtenus pour une de ces distances de dérive choisie arbitrairement à 15 $cm$.

Nous allons commencer par regarder les résultats obtenus pour les reconstructions de traces en utilisant les hits calculés par la méthode des barycentres.

La Fig. 5.7 montre la distribution des résidus (Xmes-Xtrace), où Xmes est obtenu

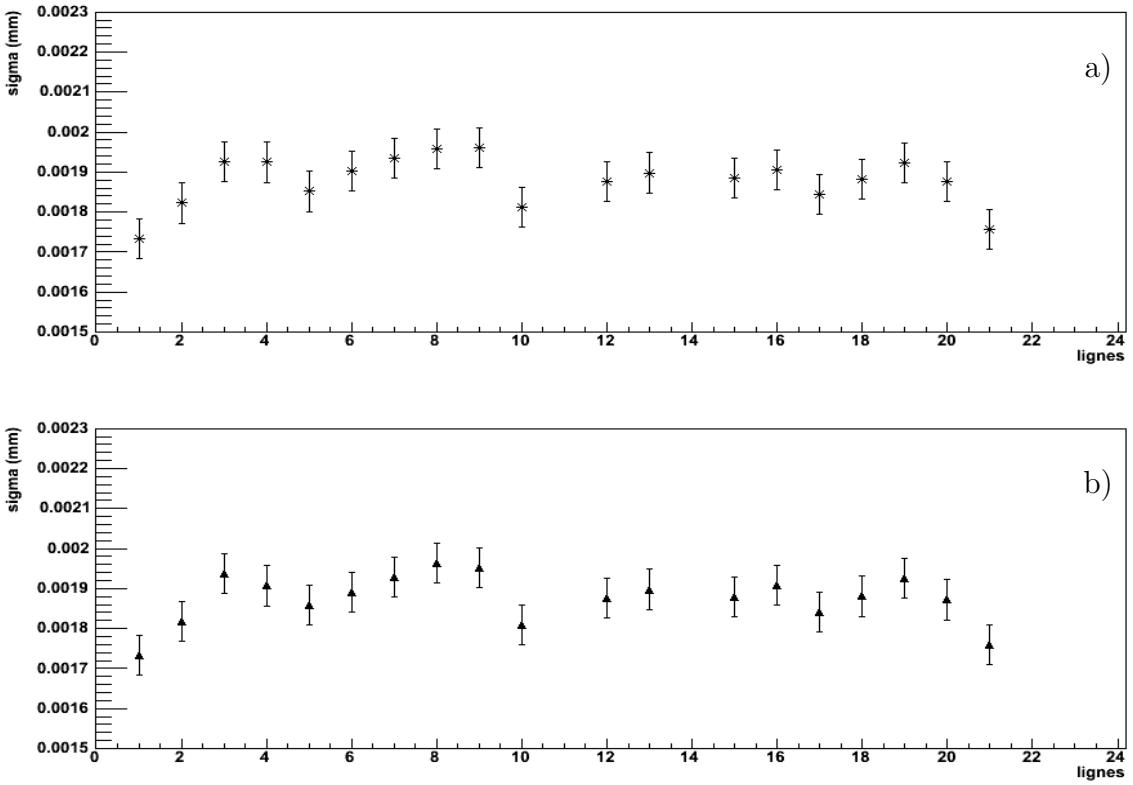


FIGURE 5.6 – a) La résolution pour les traces ajustées par la méthode des moindres carrés sur les données simulées. b) La résolution pour les traces ajustées par la méthode du filtre de Kalman sur les données simulées.

par la méthode des barycentres et Xtrace est la position de la trace reconstruite, sur la ligne 12, pour une distance de 15 *cm*. Notons encore que les résidus sont calculés à partir des trajectoire ajustées en incluant la ligne en question.
Une gaussienne est ajustée sur les distributions des résidus. La moyenne et la déviation standard de cette gaussienne donne respectivement une estimation du biais et de la résolution spatiale sur cette ligne.

Les Fig. 5.8 a) et b) montrent le biais, respectivement de la méthode des moindres carrés et du filtre de Kalman, en fonction de la ligne de mesure pour la distance de dérive de 15 *cm*.

Pour rappel, les lignes $0, 11, 14, 22$ et $23$ ont été exclues ; leurs biais ainsi que leurs résolutions ne sont donc pas pris en compte dans la discussion.

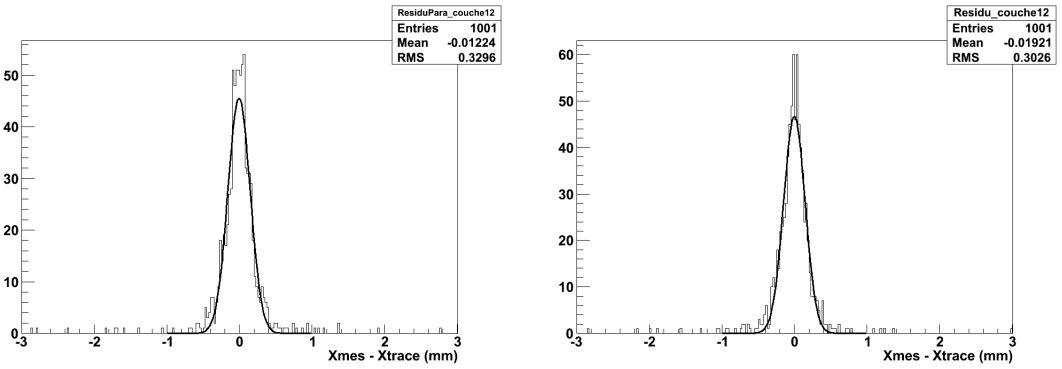


FIGURE 5.7 – Distribution des résidus (Xmes-Xtrace) sur la ligne 12 et une distance de dérive de 15 *cm*, à gauche pour la méthode des moindres carrés, à droite pour le filtre de Kalman. Xmes est obtenu en utilisant la méthode des barycentres.

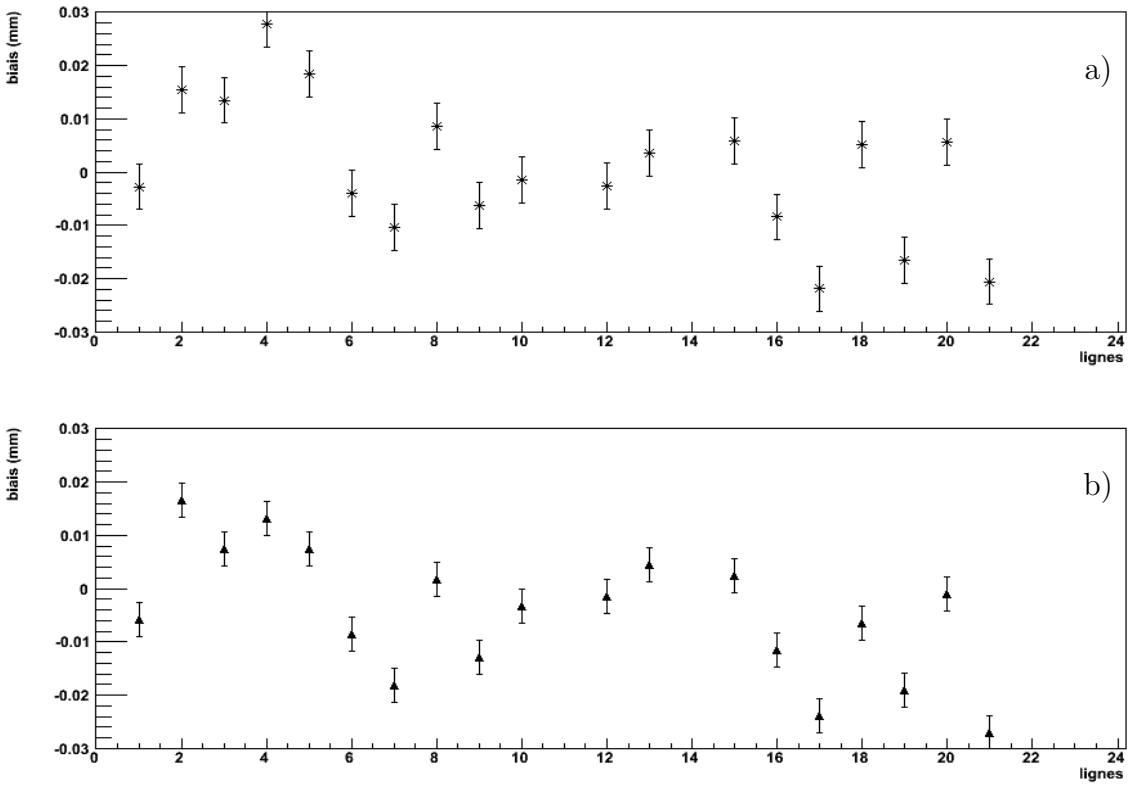


FIGURE 5.8 – a) Le biais pour les traces ajustées par la méthode des moindres carrés sur les hits calculés par la méthode des barycentres. b) Le biais pour les traces ajustées par la méthode du filtre de Kalman sur les hits calculés par la méthode des barycentres.

On peut voir, aux Fig. 5.8 a) et b) que la méthode des moindres carrés a un biais tout à fait comparable au biais pour la méthode du filtre de Kalman. Ce biais varie de $-30$ à 20 $\mu m$ et il n'est donc pas compatible avec zéro, contrairement aux données simulées.
La présence d'un biais dans les données peut s'expliquer par le fait qu'aucune correction n'est apportée dans l'estimation de la position des hits pour tenir compte d'éventuelles inhomogénéités des champs électriques et magnétiques. Par exemple, c'est un fait avéré que le champ magnétique n'est pas uniforme (voir section 4.3).
Notons également la grande dispersion du biais d'une ligne à l'autre. Cet effet est dû à l'usage de la méthode du barycentre pour estimer la position des hits comme nous le verrons plus loin.

À la Fig. 5.9 sont représentés la résolution en fonction de la ligne de mesure par la méthode des moindres carrés (a) et du filtre de Kalman (b).

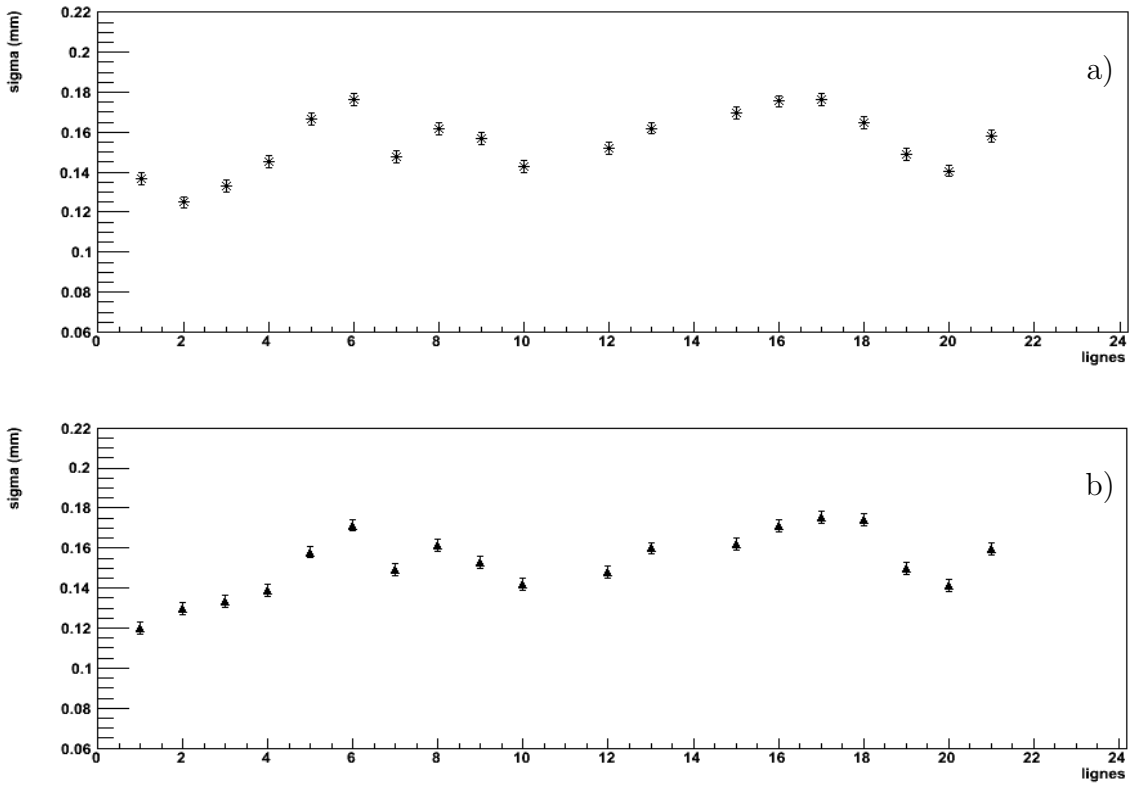


FIGURE 5.9 – a) La résolution pour les traces ajustées par la méthode des moindres carrés sur les hits calculés par la méthode des barycentres. b) La résolution pour les traces ajustées par la méthode du filtre de Kalman sur les hits calculés par la méthode des barycentres.

On peut voir, en comparant les deux graphiques de la Fig. 5.9, qu'en utilisant la méthode du filtre de Kalman nous obtenons des résultats pour la résolution comparables avec ceux obtenus par la méthodes des moindres carrés. La résolution varie autour de 150 $\mu m$ et est au mieux de 120 $\mu m$, ce qui n'est pas très satisfaisant pour une distance de dérive de 15 $cm$.

Nous allons maintenant regarder les résultats obtenus grâce à la PRF.
Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la PRF permet de calculer la position des points de mesure en tenant compte correctement de la couche résistive, contrairement à la méthode des barycentres.

Sur la Fig. 5.10, on peut voir les graphiques de biais en fonction des lignes de mesures pour les deux méthodes de reconstruction de traces (moindres carrés en (a) et filtre de Kalman en (b)) pour une distance de dérive de 15 $cm$.

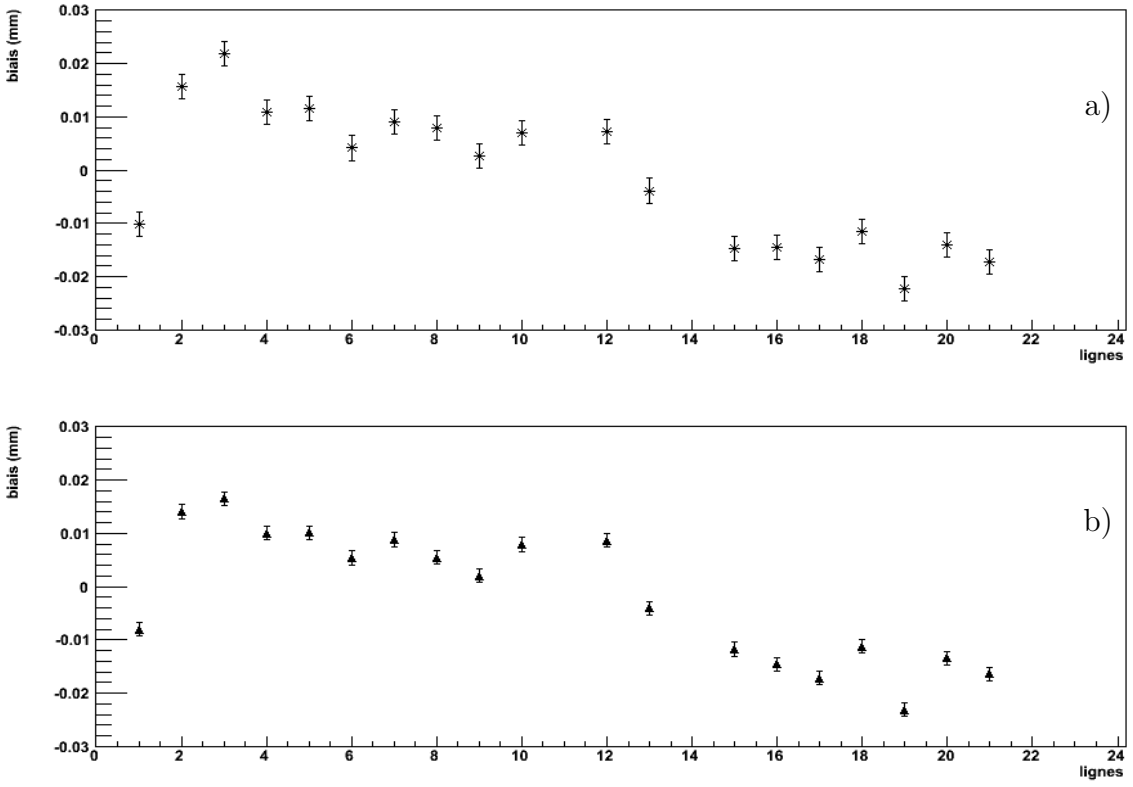


FIGURE 5.10 – a) Le biais pour les traces ajustées par la méthode des moindres carrés sur les hits calculés par la méthode de la PRF. b) Le biais pour les traces ajustées par la méthode du filtre de Kalman sur les hits calculés par la méthode de la PRF.

Les biais sont très similaires aux biais observés pour les traces ajustées sur les positions calculées par la méthode des barycentres (voir Fig 5.8 a) et b)).
La grande différence réside dans la plus petite dispersion des biais autour d'une tendance globale qui se remarque facilement (des biais positifs dans la première moitié du détecteur, et des biais négatifs dans la deuxième moitié).
En effet, avec la PRF, les points de mesure sont reconstruits avec une plus grande précision : l'erreur sur les points de biais diminue de $\sim 4.3\ \mu m$ à $\sim 2.3\ \mu m$ pour les moindres carrés et de $\sim 3.2\ \mu m$ à $\sim 1.3\ \mu m$ pour le filtre de Kalman.

Pour finir, la Fig. 5.11 représente la résolution pour les deux méthodes de reconstruction (moindres carrés en (a) et filtre de Kalman en (b)) pour les hits calculés par la méthode de la PRF, pour une distance de dérive de 15 $cm$.

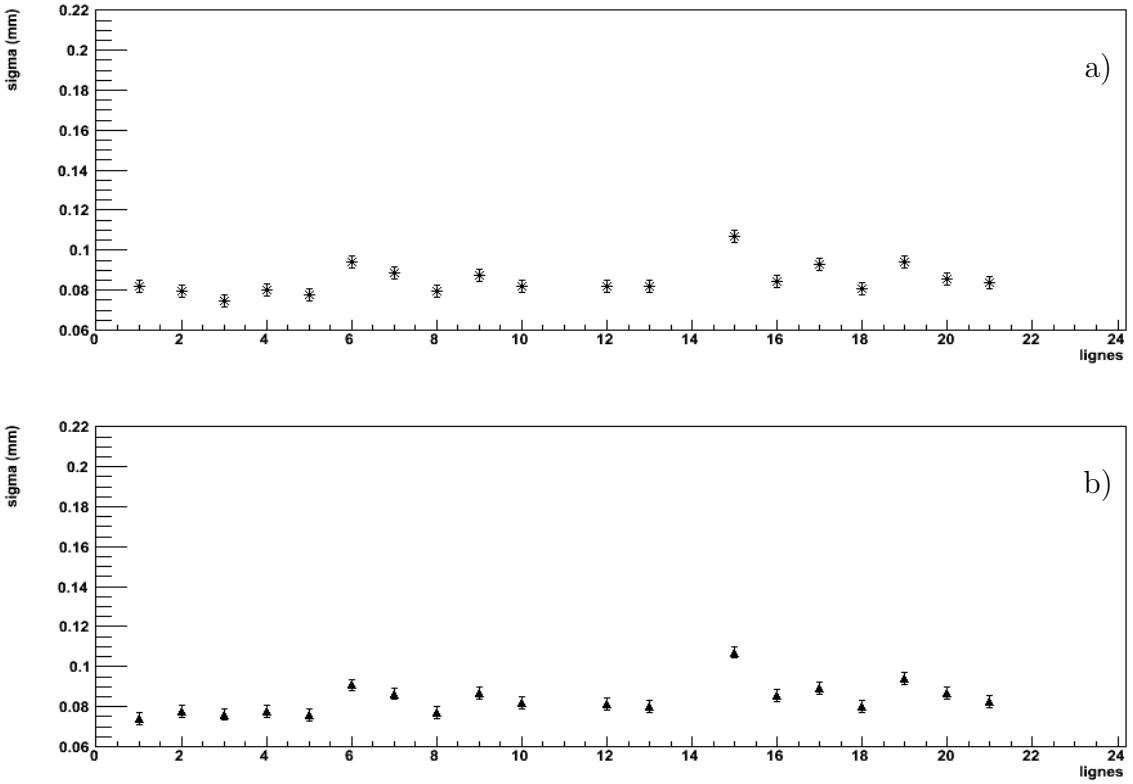


FIGURE 5.11 – a) La résolution pour les traces ajustées par la méthode des moindres carrés sur les hits calculés par la méthode de la PRF. b) La résolution pour les traces ajustées par la méthode du filtre de Kalman sur les hits calculés par la méthode de la PRF.

On remarque tout d'abord que les erreurs diminuent d'un facteur 10 par rapport aux mesures faites en utilisant les barycentres, on voit aussi très nettement une

amélioration de la résolution qui atteint à présent 80 $\mu m$ pour 15 $cm$ de dérive. Nous discuterons plus en détail ce dernier point dans la section qui suit.
Il est à noter également que le filtre de Kalman améliore la résolution de quelques microns par rapport à la méthode des moindres carrés.

### 5.7.3 Résolution ultime

Comme nous l'avons vu à la section 5.7.1, la résolution est systématiquement sous-estimée lorsqu'on inclut le point de mesure dont on veut calculer le résidu dans l'ajustement de la trace. Nous avons donc effectué 19 ajustements de traces en excluant à chaque fois la couche dont on calcule le résidu (les 19 lignes étant les 24 lignes du détecteur moins les 5 lignes exclues).
Nous avons ensuite pris la moyenne géométrique entre la résolution excluant la couche et la résolution l'incluant, et ce pour chacune des 19 lignes.
Pour finir nous avons fait la moyenne des 19 moyennes géométriques, ce qui correspond à la résolution du détecteur à une distance de dérive fixée.
Nous avons appliqué cette méthode aux 9 distances de dérive. Les résultats que nous avons obtenus sont repris sur la Fig. 5.12 qui montre la résolution calculée par le filtre de Kalman en fonction de la distance de dérive avec les positions calculées avec le barycentre (cercle ouvert) et les positions obtenues avec la PRF (étoile).

Nous pouvons, à partir de ces résultats, comparer les différentes méthodes mise en place au cours de ce travail.

Comme nous l'avons expliqué, la méthode de calcul de la position par les barycentre de charge est moins précise que la méthode de calcul par la PRF, car elle ne tient pas compte de la couche résistive du détecteur contrairement à la PRF. On observe bien sur la Fig. 5.12 une grande amélioration de la résolution entre ces deux méthodes. Si l'on compare les résultats obtenus par la reconstruction de traces avec la méthode du filtre de Kalman pour les deux méthodes de calcul de position, on observe une amélioration qui va de 29 à 52% (respectivement pour 45 et 5 $cm$ de dérive).

Le dernier calcul que nous avons effectué est le calcul de la résolution "ultime" du détecteur, c'est à dire la résolution qu'aurait le détecteur pour un électron si la distance de dérive de cet électron était de zéro centimètre.
Nous avons calculé cette résolution pour une reconstruction de traces par méthode de filtre de Kalman, sur des données calculées par la méthode de la PRF, puisque nous avons démontré que c'est ce qui donnait les meilleurs résultats.
Pour calculer cette résolution ultime il faut connaître l'évolution de la résolution en

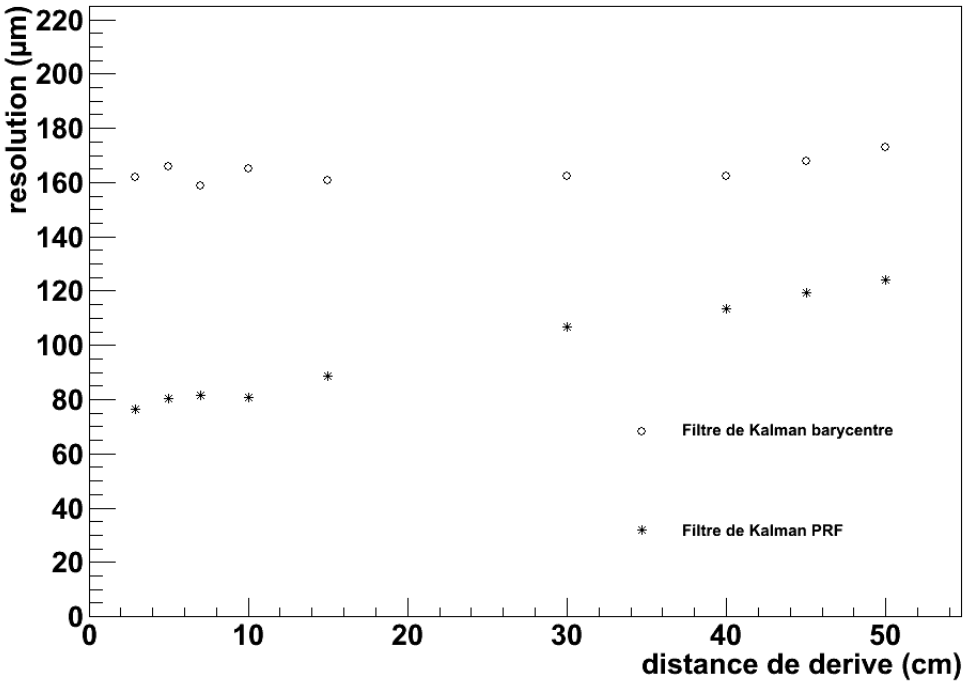


FIGURE 5.12 – Résolution du module Micromegas CLK 5 $M\Omega$ en fonction des 9 distances de dérives différentes pour les deux méthodes de calcul de la position des hits (barycentre et PRF) pour la méthode de reconstructions de traces par filtre de Kalman.

fonction de la distance de dérive.
Ce lien est donné par l'équation suivante :

$$\sigma(z) = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{C_d^2}{N_{eff}} z}$$

où $z$ est la distance de dérive, $C_d$ le coefficient de diffusion, $\sigma(z)$ la résolution à la distance $z$, $\sigma_0$ la résolution ultime et $N_{eff}$ est le nombre effectif d'électrons d'ionisation primaires sur la longueur d'un pad.
Cette relation nous dit que la résolution à une certaine distance de dérive est la somme quadratique de la résolution ultime du détecteur, et de la déviation standard de la diffusion d'un électron en présence d'un champ électrique (Eq.2.6).

Nous avons donc ajusté la fonction de résolution aux données obtenues en laissant varier deux paramètres : la résolution ultime et le nombre effectif d'électron. Le coefficient de diffusion $C_d$ a été calculé par le programme de simulation MAGBOLTZ

[33], et vaut 94 $\mu/\sqrt{cm}$. Le résultat est présenté en Fig. 5.13.

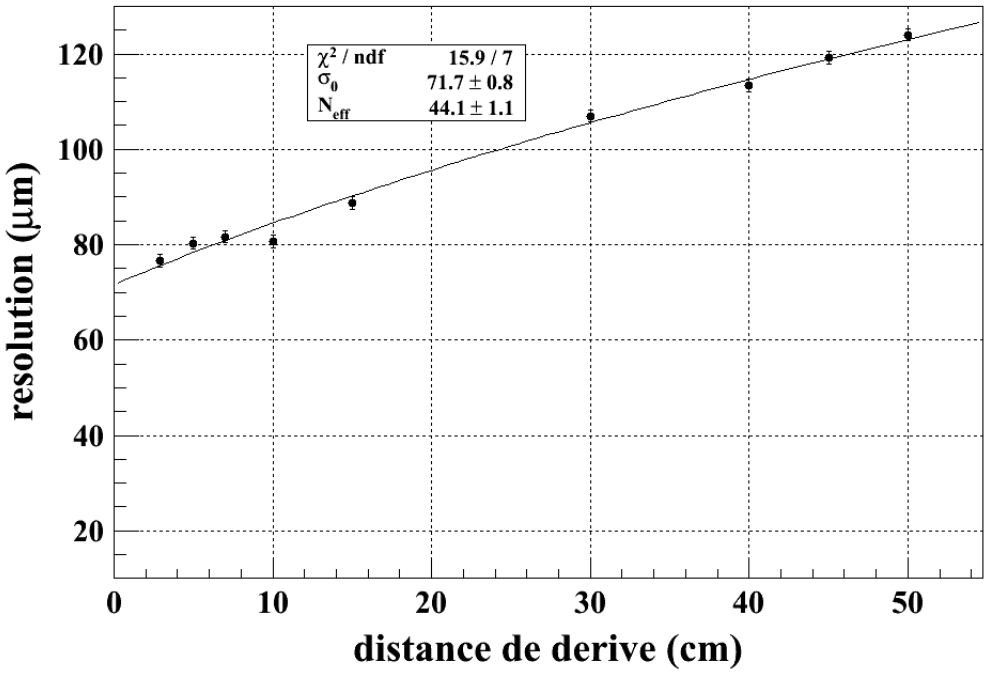


FIGURE 5.13 – Résolution en fonction de la distance de dérive. La résolution est obtenue en utilisant le filtre de Kalman et les positions reconstruites par la méthode de la PRF

Nous obtenons donc une résolution ultime de $71.7 \pm 0.8$ $\mu m$ pour des anodes de 3 $mm$ de largeur. La résolution obtenue est donc plus de 40 fois plus petite que la largeur des pads.
Extrapolant ces résultats à une distance de dérive de 2.3 $m$ en présence d'un champ magnétique de 3.5 $T$ ($C_d = 25 - 30$ $\mu m/\sqrt{cm}$), la résolution serait de l'ordre de 100 $\mu m$.

# Chapitre 6

# Conclusions

L'objet de ce mémoire était d'étudier la possibilité d'utiliser une grande TPC équipée d'une structure Micromegas et d'anodes de $\sim 3 \times 7\ mm^2$ comme détecteur de traces pour la nouvelle génération d'expériences de physique des particules.
L'un des défis majeurs de ces grandes TPC est d'atteindre une très bonne résolution spatiale, de l'ordre de 100 $\mu m$, avec des anodes d'environ 3 $mm$ de large.
Pour atteindre cet objectif, les anodes de Micromegas sont recouvertes d'une couche résistive permettant la diffusion de la charge d'avalanche sur plusieurs anodes adjacentes.

L'objectif principal de ce mémoire était donc de montrer, à l'aide d'un grand prototype de TPC, qu'une telle résolution peut être atteinte. Le second objectif était de mettre en place un filtre de Kalman pour reconstruire les traces des particules chargées. Avant cela, pour nous familiariser au détecteur et au format des données, nous avons effectué une étude préliminaire des données enregistrées par le prototype. Au cours de cette analyse, nous avons extrait la vitesse de dérive des électrons dans le mélange gazeux Ar :$CF_4$ :$C_4H_{10}$ - 95 :3 :2. Notre mesure de $7.47 \pm 0.09\ cm/\mu s$ est en accord avec la valeur obtenue par simulation, pour un champ électrique de 230 $V/cm$.
Nous avons ensuite mis au point la sélection des traces en vue de la mesure de la résolution spatiale.

Pour reconstruire les traces, nous avons alors développé un filtre de Kalman adapté à notre prototype. Pour s'assurer de son bon fonctionnement, nous l'avons testé sur des données simulées et comparé avec un ajustement des traces utilisant la méthode globale des moindres carrés. Avec les simulations, nous avons vérifié l'absence de biais sur la position des hits reconstruits et sur les rayons de courbures des trajectoires. Nous avons ainsi constaté que le filtre de Kalman amenait une erreur

de 0.25% sur des rayons de courbure de 6 $m$, alors que seulement 17 $cm$ de la trace était ajustés.
Nous avons ensuite appliqué le filtre de Kalman aux données enregistrées lors des tests en faisceaux. Nous avons constaté que la résolution en utilisant la méthode du barycentre pour calculer la position des hits était légèrement meilleure pour le filtre de Kalman que pour les moindres carrés. Mais cette résolution de typiquement 150 $\mu m$ n'est pas satisfaisante pour notre application.
Nous avons alors employé la méthode de la PRF, qui tient compte de la couche résistive, pour calculer la position des hits. Cela a permis d'améliorer la résolution d'un facteur 2.
Finalement nous avons déterminé la résolution ultime de notre détecteur à $Z = 0$ ; elle vaut $71.7 \pm 0.8$ $\mu m$. En extrapolant pour une distance de dérive de 2.3 $m$ et dans un champ magnétique de 3.5 $T$, la résolution reste meilleure que 100 $\mu m$.
Ces résultats sont très encourageants sachant qu'actuellement aucune correction n'est apportée pour tenir compte des inhomogénéités des champs électrique et magnétique.
Notons encore que le filtre de Kalman développé dans le cadre de ce mémoire est appelé à devenir l'une des méthodes officielles pour la reconstruction des traces pour les grandes TPC de futurs collisionneurs électron-positron.

Les Micromegas semblent donc être des candidats prometteurs pour équiper les futures grandes TPC. Cependant, avant de mettre en service un tel détecteur, des mesures supplémentaires doivent encore être effectuées, notamment en exposant le grand prototype à un haut flux de particules pour étudier les effets de charges d'espace. Il reste également à étudier l'efficacité de détection et du point de vue de la reconstruction, à mettre en place la reconstruction en 3 dimensions. De futurs tests en faisceaux avec 7 modules Micromegas sont déjà prévus à cet effet.

# Bibliographie


[1] K. Nakamura et al. (Particle Data Group). *Particle Physics Booklet.* IOP Publishing, 2010.

[2] Gilles De Lentdecker. Etude d'un compteur à gaz à grille microscopique (micromegas) pour un traceur au lhc. Master's thesis, Université Libre de Bruxelles, 1997-1998.

[3] Maximilien Alexandre Chefdeville. *Development of Micromegas-like gaseous detectors using a pixel readout chip as collecting anode.* PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 2009.

[4] P. Langevin. Sur la théorie de mouvement brownien. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 146 :530–533, 1908.

[5] G. CHARPAK et F. SAULI G. SCHULTZ. Mobilities of positive ions in some gas mixtures used in proportional and drift chambers. *Revue de Physique Appliquée*, 12 :67–70, 1977.

[6] L. Rolandi W. Blum. *Particle Detection with Drift Chambers.* Springer-Verlag, 1993.

[7] F. Sauli. *Principles of operation of multiwire proportional and drift chambers.* CERN report, 1977.

[8] Ilc tpc wiki. `http://www-hep.phys.saga-u.ac.jp/ILC-TPC/gas/index.html`.

[9] H. Raether. *Electron avalanches and breakdown in gases.* Butterworth, 1964.

[10] Maxwell electromagnetic field simulation for high-performance electromechanical design. `http://www.ansoft.com/products/em/maxwell/`.

[11] Catherine VANDER VELDE. Phys-f-420 méthode éxpérimentale de la physique des particules.

[12] R.L. Gluckstern. *NIM*, 24 :381–, 1963.

[13] A. Oed. Position-sensitive detector with microstrip anode for electron multiplication with gases. *NIM*, 263 :351–359, 1988.

[14] F. Angelini et al. *IEEE Trans. Nucl. Sci. NS*, 37, 1990.

[15] F. Sauli. Gem : A new concept for electron amplification in gas detectors. *Nucl. Instr. and Meth.*, A 386 :531–534, 1997.

[16] Gilles De Lentdecker. *Contribution to the study of the central tracking system of the CMS detector at the LHC collider and to the elaboration of its on line triggering system.* PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2002.

[17] A. Brensan et al. High rate behavior and discharge limits in micro-pattern detectors. *NIM*, 4 424 :321–342, 1999.

[18] I. Giomataris et al. Micromegas : a high-granularity position-sensitive gaseous detector for high particle-flux environments. *Nucl. Instr. and Meth.*, A 376 :29–35, 1996.

[19] J. Derré et al. Fast signals electron detection with micromegas photodetector. *NIM*, 499 :314–321, 2000.

[20] CMS collaboration. *CMS Physics Technical Design Report.* CERN, 2006.

[21] `http://www.gsi.helmholtz.de/forschung/kp/kp1/experimente/alice/tpc/TPC_overview_e.html`.

[22] Joachim Baechler. The alice tpc. 15.

[23] Thosten Lux for the T2K groups. A tpc for the near detector at t2k. In *3rd Symposium on Large TPCs for Low Energy Rare Event Detection*, 2007.

[24] the ILD concept Group. International large detector. *Letter of Intent*, 2010.

[25] Ingrid-Maria Gregor Tobias Haas Ulrich Kotz Isabell-Alissandra Melzer-Pellmann Norbert Meyners Joachim Mnich Felix Sefkow Ties Behnke, Erika Garutti. Test beams at desy. EUDET-Memo-2007-11.

[26] L. Jonsson M. Ljunggren B. Lundberg U. Mjornmark-A. Oskarsson-E. Stenlund L. Osterman P. Christiansen, P. Gros. Particle tracking and energy loss measurements with the lctpc : A comparison to simulation models. EUDET-Memo-2010-36.

[27] F.Formenti et al. J.Alozy, F.Bergsma. First version of the pcmag field map. EUDET-Memo-2007-51.

[28] M. Dixit M. Riallot YunHa Shin S. Turnbull-W. Wang D. Attié, P. Colas. Results with micromegas modules at lp-tpc. EUDET-Memo-2010-23.

[29] D. Arogancia et al. Study in a beam test of the resolution of a micromegas tpc with standard readout pads. *NIM*, 602 :403–414, 2009.

[30] J.-P. Martin K. Sachs M.S. Dixit, J. Dubeau. Position sensing from charge dispersion in micro-pattern gas detectors with a resistive anode. *NIM*, 518 :721–727, 2004.

[31] D. Karlen representing the T2K ND280 TPC group. T2k nd280 time projection chambers. In *NSERC Review*, 2007.

[32] D. Calvet X. de la Broise E. Delagnes-A. Delbart-F. Druillole A. Le Coguie E. Mazzucato E. Monmarthe M. Zito P. Baron, J. Beucher. After, the front end asic of t2k time projection chamber.

[33] S.F. Biagi. Monte carlo simulation of electron drift and diffusion in counting gases under the influence of electric and magnetic fields. *NIM*, A 421 :234–240, 1999.

[34] A. Bellerive, K. Boudjemline, R. Carnegie, M. Dixit, J. Miyamoto, E. Neuheimer, A. Rankin, E. Rollin, K. Sachs, J. . Martin, V. Lepeltier, P. Colas, A. Giganon, and I. Giomataris. Spatial resolution of a micromegas-tpc using the charge dispersion signal. *ArXiv Physics e-prints*, 2005.

[35] Glen Cowan. *Statistical Data Analysis*. Oxford University Press, 1998.

[36] Raymond A. Nash Jr. Charles F. Price Arthur A. Sutherland Jr. Arthur Gelb, Joseph F. Kasper Jr. *APPLIED OPTIMAL ESTIMATION*. Arthur Gelb, 1974.

[37] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME*, 82 :35–45, 1960.

[38] the JLC Group. Introduction to helical track manipulations. `http://www-glc.kek.jp/subg/offl/lib/docs/helix_manip/main.html`.

[39] R.Diener J.Engels et al. J.Abernathy, K.Dehmelt. Latest developments in the marlintpc software package. EUDET-Report-2008-09.

[40] ACFA Sim-J Group. Kaltest : A root-based kalman filter package. `http://www-jlc.kek.jp/subg/offl/kaltest/`.

[41] Root a data analysis framework. `http://root.cern.ch/drupal/`.

[42] Pascal VANLAER. *Contribution to the study of the central tracking system of the CMS detector at the future proton collider LHC*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1998.

[43] Désiré Contraire. Introduction au quatrième principe de la thermodynamique. Master's thesis, Université Libre de Bruxelles, 1959.

# Annexes

## Annexe A

Pour trouver la valeur de $K_k$ qui minimise la trace de la matrice de covariance, nous allons donc prendre la dérivée partielle de $Tr[C_k]$ par rapport a $K_k$ et l'égaler a zéro.

$$\frac{\partial Tr[C_k]}{\partial K_k} = 0$$

Ce qui nous donne, en utilisant ici la relation pour la dérivée partielle de la trace du produit de deux matrices $A$ et $B$ (avec $B$ symértique) $\frac{\partial}{\partial A}\left(Tr[ABA^T]\right) = 2AB$ et en repartant de la relation Eq.(5.12) pour la matrice de covariance :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Tr[C_k]}{\partial K_k} &= \frac{\partial}{\partial K_k}\left(Tr[(I-K_kH_k)C_k^{k-1}(I-K_kH_k)^T] + Tr[K_kR_kK_k^T]\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial K_k}(I-K_kH_k). \\
&\cdot \quad \frac{\partial}{\partial (I-K_kH_k)} Tr[(I-K_kH_k)C_k^{k-1}(I-K_kH_k)^T] \\
&+ \quad \frac{\partial}{\partial K_k} Tr[K_kR_kK_k^T] \\
&= -2(I-K_kH_k)C_k^{k-1}H_k^T + 2K_kR_k = 0
\end{aligned}$$

où la matrice $H_k^T$ du premier terme, vient de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial K_{ij}} \sum_l \sum_f (I-KH)_{lf} &= \frac{\partial}{\partial K_{ij}} \sum_l \sum_f (I_{lf} - \sum_s K_{ls}H_{sf}) \\
&= -\sum_f H_{jf}\delta_l^i
\end{aligned}$$

Finalement, on résoud pour $K_k$ ce qui nous donne

$$K_k = C_k^{k-1} H_k^T (H_k C_k^{k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

Qui est bien ce que nous avons appelé la *matrice de gain de Kalman.*

# Annexe B

Nous pouvons optimiser la valeur de la matrice de covariance de l'erreur après la mise à jour de la nouvelle mesure en développant l'expression Eq.5.12 :

$$\begin{aligned} C_k &= (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1} (I - K_k \boldsymbol{H}_k)^T + K_k R_k K_k^T \\ &= (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1} - \left[ (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1} \boldsymbol{H}_k^T + K_k R_k \right] K_k^T \\ &= (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1} - \left[ C_k^{k-1} \boldsymbol{H}_k^T + K_k (\boldsymbol{H}_k C_k^{k-1} \boldsymbol{H}_k^T + R_k) \right] K_k^T \end{aligned}$$

Une fois que l'on a cette expression, il suffit de démontrer que le deuxième terme du membre de droite est nul. Pour cela il faut se rappeler de l'expression de la matrice de gain (Eq.5.13) :

$$K_k = C_k^{k-1} H_k^T (H_k C_k^{k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$$

On voit donc que le terme entre parenthèses de la matrice de covariance est nul.
Ce qui permet d'écrire l'expression optimale de la matrice de covariance (Eq.5.14) :

$$C_k = (I - K_k \boldsymbol{H}_k) C_k^{k-1}$$