Conductance Quantique

S. Massar et M. Mansour, 2009
S. Massar, 2015

16 juillet 2016

1 But de la manipulation

Considérons un circuit formé d'un générateur de courant continue E, d'une paire de résistances R_1 et R_2, d'un interrupteur K et d'un oscilloscope O de résistance interne R_i (voir la figure 1).

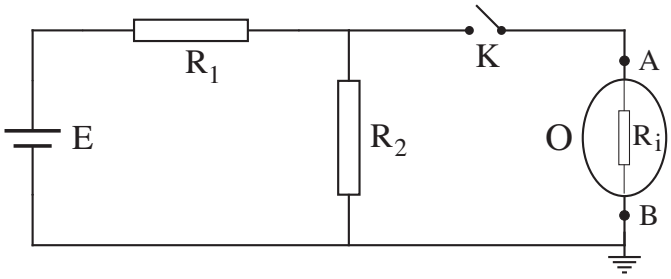

FIGURE 1 – Circuit de la manipulation, en partie cablé (boites bleues).

Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K, le courant dans la partie droite du circuit s'annule. L'oscilloscope, placé en mode "balayage", renvoie sans surprise l'image d'une fonction en escalier [1](figure 2a). Cependant, en augmentant la résolution temporelle de l'oscilloscope, on remarque que le courant ne s'annule pas brutalement, mais baisse graduellement en suivant approximativement une courbe sigmoidale (figure 2b). L'explication est simple : la rupture compléte du contact métallique n'est pas un processus instantané ; elle prend un certain temps. Si on continue à augmenter la résolution temporelle, tout en se restreignant aux valeurs de plus en plus faibles du courant, on observe qu'aux derniers instants de la rupture le courant baisse par palier (figure 2c). Ce qui implique que la conductance G de l'interrupteur, définit comme l'inverse de sa résistance, passe également par des paliers avant de s'annuler : elle est quantifiée. Un autre résultat remarquable tient au fait que les valeurs successives de la conductance sont des multiples entiers de la plus petite d'entre elles, appelée "conductance quantique fondamentale" et représentée dans la suite par G_q. La valeur de la conductance quantique fondamentale s'avére indépendante des caractéristiques de l'interrupteur.

1. La valeur du courant dans le circuit s'obtient par le rapport de la tension, affichée par l'oscilloscope, et sa résistance interne R_i.

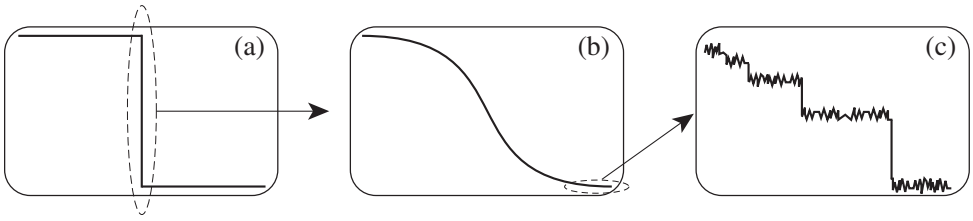

FIGURE 2 – Résultats schématiques observés à l'oscilloscope.

L'explication de ce phénoméne se situe au-delà de la vision de la physique classique. Pour le comprendre, nous devrons introduire plusieurs concepts :

— Le caractére ondulatoire des électrons (Hypothése de L. Broglie).

— Le concept de guide d'onde monomode et multimode (voir aussi la manip "ondes").

— Le principe d'exclusion de Pauli et le spin de l'électron.

— L'hypothése que dans un métal les électrons les plus énergétiques se comportent comme des particules libres, et le concept d'énergie et d'impulsion de Fermi.

Ces concepts nous permettrons d'établir l'expression théorique de la conductance quantique fondamentale :

$$G_q = \frac{2e^2}{h} \tag{1}$$

oé e est la charge électrique de l'électron et h la constante de Planck.

Le but de la manipulation consiste donc à observer la quantification de la conductance électrique, lors de la rupture d'un contact métallique, et de mesurer la conductance quantique fondamentale. La valeur obtenue est à comparer avec la prédiction théorique (1).

Pour rappel, $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C et $h = 6,626\ 10^{-34}$ J s.

2 Travail à effectuer

Vous disposez d'un circuit pré-cablé enfermé dans une boite bleue B, d'un générateur du courant continue, d'un multimétre, d'un petit cable coaxial et d'un oscilloscope à mémoire de grande précision (100MHz de bande passante, mémoire de 1M points).

2.1 Analyse du circuit

Soit V_O la tension lue par l'oscilloscope, et R_i la résistance interne de l'oscilloscope ($\approx 50\,\Omega$).

Essayons de comprendre le circuit de la figure 1. Ce circuit sera utilisé dans 3 régimes : 1) interrupteur K ouvert ; 2) interrupteur fermé ; 3) interrupteur presque ouvert, en quel cas K devient une résistance R.

Dans le cas 1, le circuit est un diviseur de tension. Quelle est la tension aux bornes de R_2 ?

Dans le cas 2, nous avons de nouveau un diviseur de tension, avec R_2 et R_i en parallèle. Quelle est la tension V_O ?

Dans le cas 3, quelle est la valeur attendue de R (par exemple lors du dernier palier) ? Dans le cas 3, on aura $R >> R_2, R_i$. La résistance aux bornes de R_2 est donc donnée approximativement pas le cas 1. Et ensuite le couple R, R_i se comporte comme un second diviseur de tension. La tension aux bornes de R_i (V_O qui est lue par l'oscilloscope) permet alors de déduire la résistance R. Déterminer dans le cas $R >> R_2, R_i$, la relation entre V_O et R.

De manière plus générale, montrer que

$$R = \frac{V_E}{V_O} \frac{R_i R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - R_i \ . \tag{2}$$

Dans cette dernière expression on n'a pas fait l'hypothèse simplificatrice $R >> R_2, R_i$. Montrer que cette situation peut se déduire comme une limite de l'expression générale.

2.2 Mesure des résistances

Mesurer les résistances R_1, R_2, R_i.

Mesurer les tensions aux bornes de R_1, R_2, V_O lorsque l'interrupteur est ouvert et fermé.

En déduire la valeur attendue de V_O lors du dernier palier.

2.3 Réglage du générateur

Brancher le multimétre (en position de voltmétre) aux bornes du générateur (sorties du bas) et régler la tension V_E aux environs de $10\,V$.

2.4 Réglage de l'oscilloscope

Mettez l'oscilloscope (figure 3) sous tension. Pour prendre des mesures, faites attention aux points suivants :

— Autoset permet de voir le signal carré (comme sur la figure 2a).

— Si l'échelle verticale est 2mV/DIV, la bande passante est réduite à 20MHz (affichage de BW ! ! sur l'écran). Il est recommandé de travailler avec 5mV/DIV ou plus.

— Pour règler le déclenchement, aller dans Trigger, Menu, et mettre pente "descendante", mode "normal", type "front", couplage "CC".

— Pour enregistrer le signal sur une clé USB, utiliser le menu "Save/Recall", choisir quoi enregistrer avec le bouton "Multipurpose a" -choisir "Fenêtrage Ecran" afin de ne sauver que la partie intéressante du signal-, choisir l'extension .csv (bouton "Multipurpose b"), choisir "Save Waveform" (pour enregistrer les valeurs numériques), vérifier que le support sur lequel on va enregistrer est la clé USB, pousser sur "Save".

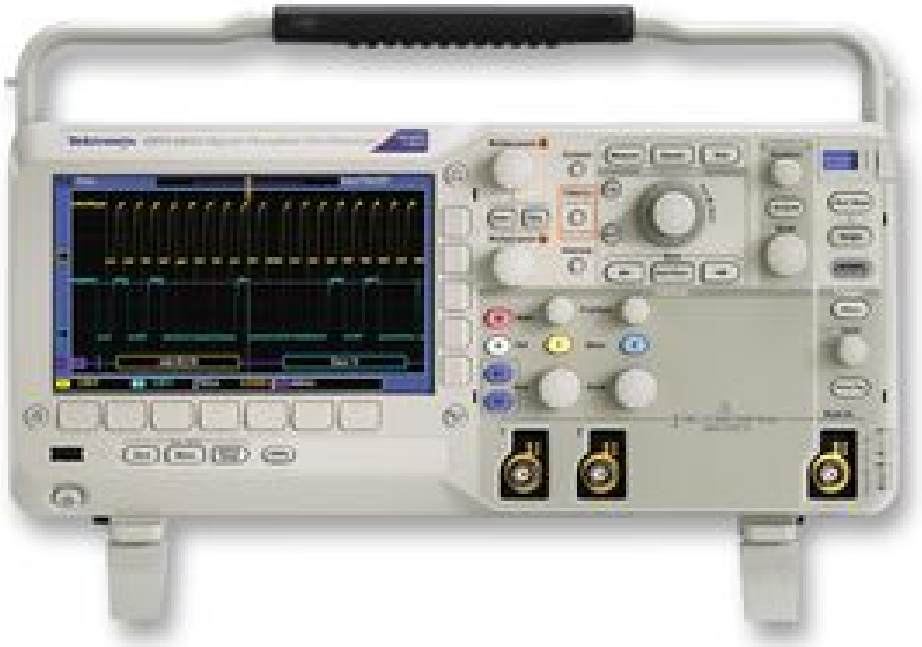

FIGURE 3 – Vue frontale de l'oscilloscope DPO2012.

2.5 Prise de données

Connectez le générateur au circuit pré-cablé (la boite bleue B) et branchez-le à l'entrée CH1 de l'oscilloscope à l'aide du petit cable coaxial. Actionnez l'interrupteur et observez la variation du courant sur l'oscilloscope. Raffinez peu à peu l'affichage en augmentant le facteur d'échelle vertical tout en abaissant le niveau du déclanchement du balayage au plus prés du seuil de la disparition du courant. Continuez d'actionner l'interrupteur jusqu'à obtention des paliers analogues à ceux de la figure (2 C). Vous pouvez alors enregistrer les résultats sur une clé USB pour les analyser ensuite à l'aide d'un tableur Excel. Répétez l'expérience pour avoir un minimum de trois séries de données distinctes.

2.6 Analyse des résultats

La difficulté de cette expérience est l'analyse des résultats. En effet les données sont difficilement reproductibles, et il y a diverses manières de présenter les résultats.

Voici quelques suggestions :

Choisir les courbes $V_O(t)$ qui présentent les meilleurs résultats. (Assurez vous que les paliers de V_O sont présent approximativement aux valeurs attendues (on peut avoir des paliers spurieux à des valeurs nettement plus grandes). N'oubliez pas de mettre ces courbes en annexe de votre rapport.

Sur Excell, faites une analyse statistique détaillée de chacune des courbes enregistrées : valeur moyenne de la tension mesurée de chaque plateau. Il peut être intéressant de donner aussi l'écart type pour chaque plateau. (Mais attention :

l'oscilloscope a une bande passante finie, ce qui fait que les points successifs des courbes ne sont pas indépendants). Vous pouvez également essayer de faire un histogramme pour chaque courbe $V_O(t)$: combien de fois $V_O(t)$ prend-il chaque valeur, afin de voir si il y a des maximums qui correspondent à des paliers.

La relation (2) vous permettra d'obtenir les valeurs correspondantes de la conductance quantique $(1/R)$ de l'interrupteur.

Vous obtiendrez plusieurs valeurs de $1/R$. Analysez cet ensemble de données. Par exemple vous pouvez les présenter dans un tableau. Ou bien vous pouvez essayer d'assigner un entier n à $1/R$, et puis voir si la relation $1/R = nG_q$ est satisfaite pour une partie ou la totalité des paliers. Comparez les valeurs mesurées aux prévisions théoriques.

Concluez par une analyse critique de l'expérience.

3 Explication théorique

De maniére générale, la conduction électrique doit se concevoir comme un phénoméne quantique. D'aprés la mécanique quantique, la propagation des électrons est un phénoméne ondulatoire. C'est L. de Broglie qui a introduit l'idée d'associer é une particule massive (électron) une onde. Pour exprimer cette dualité "onde-corpuscule", il proposa la relation

$$P = \frac{h}{\lambda} \tag{3}$$

où P représente la quantité de mouvement de l'électron et λ la longueur d'onde associée. Il en résulte que l'énergie cinétique est de la forme :

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\,\lambda^2} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\,\lambda^2} \tag{4}$$

oé m est la masse de l'électron et

$$\hbar = \frac{h}{2\,\pi}\ . \tag{5}$$

Ainsi, au plus λ est petit, au plus l'énergie cinétique de l'électron est grande.

Selon de Broglie, on ne peut pas localiser un électron dans une zone plus petite que sa longueur d'onde λ. Une interprétation probabiliste de la notion de "trajectoire" devient ainsi inévitable. Tout comme les ondes sonores ou lumineuses, l'onde stationnaire électronique est caractérisée par des "ventres" et des "noeuds". La probabilité de présence de l'électron est maximum aux ventres et elle est nulle aux noeuds. Ce concept a des conséquences trés importantes. Il permit à de Broglie d'apporter une réponse satisfaisante à bon nombres de questions relatives aux propriétés des électrons, en demandant que l'onde associée soit stationnaire. Un exemple est l'explication simple des régles de quantification de Bohr (pour plus d'informations, voir l'appendice A). Dans la suite nous allons utiliser la théorie de de Broglie pour dériver la forme de la conductance quantique fondamentale (1).

Dans un métal, les électrons de valence peuvent se propager quasi-librement jusqu'aux bords du conducteur de sorte que leur énergie potentielle $U(x, y, z)$ peut étre supposé égal à zéro à l'intérieur du conducteur et trés grande aux bords. Tout se passe comme si les électrons étaient confinés a l'intérieur d'une

boite aux dimensions du métal. D'où l'intérét d'étudier le spectre d'énergie (les valeurs possibles de l'énergie) d'un électron dans une boite.

Considérons d'abord un électron confiné dans une boite unidimensionnelle de longueur L. L'onde stationnaire associée é l'électron (et donc sa probabilité de présence) doit nécessairement s'annuler aux extrémités de la boite. Cette propriété garantit que l'électron ne sort pas de la boite. La valeur maximum de la longueur d'onde, qu'on notera par λ_1, est donc égale à $2L$ (la longueur de la boite vaut une demi longueur d'onde), ce qui correspond à l'énergie minimum : $E_1 = h^2/(8mL^2) = \pi^2\,\hbar^2/(2mL^2)$. C'est l'énergie de l'état fondamental de l'électron. Si on excite l'électron, par exemple en le soumettant a un champs électrique, son énergie ne peut qu'augmenter par palier. Ces paliers correspondent aux valeurs possibles de la longueur d'onde. Le deuxiéme niveau excité aura comme longueur d'onde $\lambda_2 = (1/2) \times 2L = L$, le troisiéme $\lambda_3 = (1/3) \times 2L = 2L/3$, et le niéme $\lambda_n = 2L/n$. Les niveaux d'énergie possibles de l'électron sont donc données par

$$E_n \;=\; \frac{h^2}{2m\,\lambda_n^2} \;=\; \frac{\pi^2\hbar^2\,n^2}{2m\,L^2} \quad ; \quad n \;=\; 1, 2, \cdots \tag{6}$$

La relation (4) se généralise aisément a 3 dimensions :

$$E \;=\; \frac{P^{\,2}}{2m} \;=\; \frac{P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2}}{2m} \;=\; \frac{h^2}{2m}\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}\right) \tag{7}$$

et donc pour une boite du type parallélépipéde rectangle de dimensions $\{L_x, L_y, L_z\}$ on a

$$E_{n_x n_y n_z} \;=\; \frac{\pi^2\,\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right) \quad ; \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \cdots \tag{8}$$

D'aprés le principe d'exclusion de Pauli, chaque niveau d'énergie E peut accommoder jusqu'à deux électrons de spins opposés. A température nulle, les niveaux d'énergie sont remplis jusqu'à une énergie appelée l'énergie de Fermi E_F qui caractérise chaque métal. A l'énergie de Fermi, les électrons se déplacent à une vitesse $v_{_F}$, appelée la vitesse de Fermi. Dans le cas particulier où les électrons se déplacent librement dans le métal, l'énergie et la vitesse de Fermi sont reliées par la relation :

$$E_F = \frac{1}{2}\,m\,v_F^2 \tag{9}$$

où m est la "masse effective" de l'électron (pour plus d'informations sur la notion de la masse effective, voir l'appendice B). La table I donne les valeurs de l'énergie et de la vitesse de Fermi pour quelques métaux.

Lors de la rupture d'un contact entre deux conducteurs électriques, on suppose l'existence de fins filaments conducteurs dont le diamétre diminue progressivement dans les derniers instants avant la rupture définitive. On ne connait pas la forme particuliére du dernier filament mais on peut supposer qu'il présente une aire minimum A qui diminue graduellement jusqu'à la rupture.

Table I. Energie E_F et vitesse v_F de Fermi pour quelques métaux.

métal	E_F [eV]	v_F [10^6 m/s]
Na	3.24	1.07
Ag	5.49	1.39
Au	5.53	1.40
Cu	7.00	1.57
Fe	11.1	1.98
Al	11.7	2.03

$1[eV] = 1.6 \times 10^{-19}$ J.

On peut imaginer que le filament se déforme progressivement au cours de la rupture à cause de sa ductilité. Cette dynamique implique un réarrangement progressif des atomes du conducteur, ce qui doit se produire sur une échelle de temps plus longue que le temps de passage des électrons à travers le filament car les électrons sont environ 2000 fois plus légers que les noyaux. On supposera donc que les électrons se déplacent dans un filament de forme quasi-stationnaire dont la section a une aire A trés petite. Pour comprendre la conduction dans un filament trés fin, il est nécessaire de déterminer les orbitales électroniques. Pour simplifier le raisonnement, nous considérons un filament de section carrée uniformément le long de l'axe z. La largeur du filament est notée ℓ et son aire est donc $A = \ell^2$. La longueur du filament $L_z \gg \ell$. L'application directe des relations (6) et (8) donne :

$$E_{n_x n_y k_z} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi\hbar}{\ell}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad ; \quad n_x, n_y = 1, 2, 3, \cdots \tag{10}$$

où

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} = \frac{\pi\, n_z}{L_z} \quad ; \quad n_z = 1, 2, 3, \cdots \tag{11}$$

représente le "nombre d'onde" dans la direction z. Dans la mesure où $L_z \gg \ell$, on peut considérer k_z comme une variable quasi-continue avec $0 \lesssim k_z < \infty$. Notons qu'en terme de nombre d'onde la relation de L. de Broglie (3) prend la forme :

$$P_z = \hbar\, k_z \tag{12}$$

Si nous fixons l'énergie E, et supposons que la section A du fil décroit, nous passons d'une situation de "guide d'onde" multimode (plusieurs valeurs de $P_z > 0$ sont possibles), à un "guide d'onde" monomode (une seule valeur de $P_z > 0$ est possible, correspondant à $n_x = n_y = 1$). Finalement, pour une section A trop petite et E fixée, l'électron ne peut plus du tout se propager dans le fil.

Le concept de guide d'onde monomode et multimode est trés général. Les détails, eux dépendent du systéme étudié. Ainsi le nombre de modes accessibles à une énergie donnée dépendra de la forme du fil (section carrée, rectangulaire, circulaire, irréguliére). [2]

2. Ce méme concept de guide d'onde monomode et multimode apparait dans de nombreux autres contextes. Par exemple des ondes sonores qui se propagent dans un tuyau. Des ondes lumineuses qui se propagent dans des fibres optiques : A fréquence donnée, on peut avoir des fibres monomodes (ayant une petite section) et des fibres multimodes (ayant une plus grande section).

Dans le cas présent, la relation (10) montre clairement qu'il n'existe pas de modes de propagation en dessous de l'énergie $E_{110} = \pi^2\hbar^2/(m\ell^2)$ où s'ouvre le premier canal de conduction (guide d'onde monomode). Un nouveau canal de conduction s'ouvrira à chaque seuil d'énergie $E_{n_x n_y 0}$ (voir figure 4). Tous ces seuils forment un spectre discret du à la quantification des niveaux d'énergie dans la direction transverse à la direction de propagation. C'est cette quantification qui est observée dans l'expérience de conduction quantique.

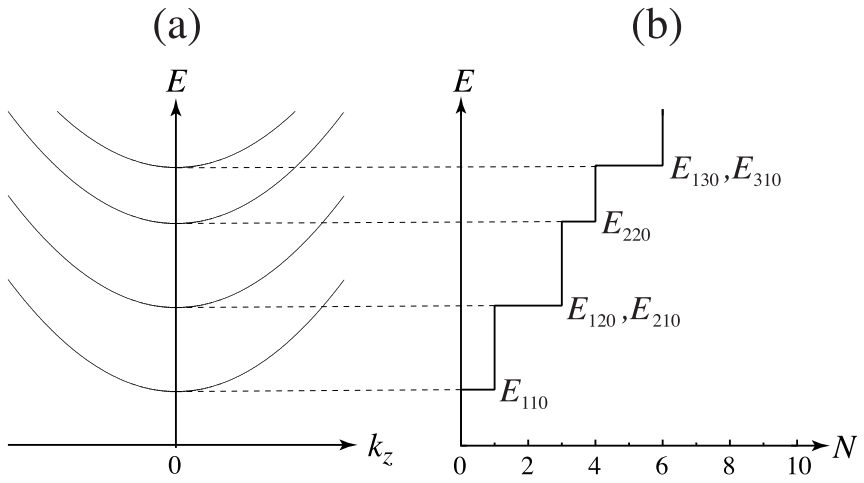

FIGURE 4 – (a) Energies eq. (10) des premiéres orbitales électroniques en fonction du nombre d'onde k_z. (b) Nombre N de canaux de propagation qui sont ouverts sous l'énergie E.

Comme les électrons de conduction ont une énergie égale à l'énergie de Fermi, on peut estimer dans le modéle ci-dessus la taille du filament lorsque la conduction tombe à zéro c'est-à-dire lorsque le dernier canal de conduction se ferme. La condition est donnée par

$$E_F = \frac{1}{2}\, m\, v_F^2 = E_{110} = \frac{1}{m}\left(\frac{\pi\hbar}{\ell}\right)^2 \tag{13}$$

soit encore

$$\ell_{critique} = \pi\sqrt{2}\,\frac{\hbar}{m v_F} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{\hbar\, v_F}{E_F} \tag{14}$$

Dans un conducteur comme le cuivre pourl lequel $E_F \approx 7$ eV et $v_F \approx 1.6\ 10^6$ m/s cette estimation donne un filament d'une taille de l'ordre de $\ell \simeq 0.3$ nm (10^{-9} m). Juste avant la rupture, le filament n'a donc plus qu'une largeur de l'ordre de un ou deux atomes. Un phénoméne semblable est prédit pour un filament cylindrique ou d'une autre forme. La connaissance de ce phénoméne de quantification des orbitales électroniques dans la direction transverse au filament permet de déterminer la résistance électrique du filament.

L'intensité du courant I dans un conducteur est définie comme la quantité de charge qui traverse ce conducteur par unité de temps. Soit n_e la densité des porteurs de charge, c.à.d le nombre d'électron par unité de volume, et $\bar{v}$ leur

vitesse moyenne ($\bar{v} \approx v_F$). Le nombre d'électrons qui traversent une section A du filament (supposée uniforme), durant un intervalle de temps Δt, est alors donné par $\bar{v}\, n_e\, A\, \Delta t$. Comme chaque électron transporte une quantité de charge e, on obtient

$$I = e\ \bar{v}\ n_e\ A = e\ \bar{v}\ D_e \tag{15}$$

oé $D_e = n_e A$ est le nombre de porteurs de charge par unité de longueur dans le filament. On peut estimer ce nombre de la maniére suivante.

Aprés la rupture, les deux extrémités du conducteur sont soumises à une différence de potentielle V. Tous les porteurs de charge, que l'on suppose être des électrons, se déplacent dans le filament sous l'action de ce potentiel électrique V. Les électrons entrant dans le filament (que ce soit par la gauche ou par la droite) ont une énergie maximale E_F. Ceux qui vont de gauche à droite (dans le sens du courant) acquiérent une énergie supplémentaire eV. Leur énergie cinétique maximale é la sortie du filament est donc $E_F + eV$. Les porteurs de charges dans le filament ont ainsi une énergie comprise entre E_F et $E_F + eV$. Pour estimer D_e, nous considérons la propagation des électrons se déplaçant dans un seul des canaux de propagation (guide d'onde monomode, correspondant à $n_x = n_y = 1$), pour un filament de longueur $L_z \gg \ell$. Soit E_s l'énergie du seuil d'ouverture du canal en question (c.é.d E_{110}) et désignons par E_1 et E_2 les valeurs d'énergie d'un électron aux deux extrémités du filament :

$$E_1 = E_s + \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \qquad ; \quad E_2 = E_s + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} \tag{16}$$

oé k_1 et k_2 représentent les nombres d'onde correspondantes (cf. relation 11) :

$$k_1 = \frac{\pi\, n_{z1}}{L} \quad ; \quad k_2 = \frac{\pi\, n_{z2}}{L} \tag{17}$$

Ainsi,

$$E_2 - E_1 = e\,V = \frac{\hbar^2}{2m}(k_2^2 - k_1^2) = \frac{\hbar^2}{2m}(k_2 - k_1)(k_2 + k_1) \tag{18}$$

Par ailleurs, d'aprés la relation (17)

$$k_2 - k_1 \ = \ \frac{\pi\,(n_{z2} - n_{z1})}{L} \ \equiv \ \frac{\pi\,\Delta n_z}{L} \tag{19}$$

En introduisant le nombre d'onde moyen $\bar{k}$ par

$$\bar{k} = \frac{k_2 + k_1}{2} \tag{20}$$

on trouve finalement

$$e\,V = \frac{\pi\,\hbar^2}{m\,L}\,\Delta n_z\ \bar{k} \tag{21}$$

où $\Delta n_z \equiv n_{z2} - n_{z1}$ représente le nombre d'orbitales impliquées dans le transport du courant. En principe chaque orbitale peut accommoder 2 électrons de spin différents (principe de Pauli). Cependant, l'onde stationnaire (ventres et noeuds) associée à chaque orbitale est en réalité composée d'une onde plane du type $e^{+i\,kz}$ se propageant vers le sens positif (le sens du courant) et d'une autre $e^{-i\,kz}$ se

propageant dans le sens contraire. On peut s'en convaincre en notant que l'onde stationnaire de la forme $\cos(kz)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\cos(k\,z) \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{+i\,k\,z} \;+\; e^{-i\,k\,z}\right) \tag{22}$$

On peut dés lors considérer que seule la moitié de ces orbitales permettent la propagation des électrons dans le sens du courant. En d'autres mots, à chaque orbitale on peut associer un seul électron de conduction. Donc, le nombre de porteurs de charge par unité de longueur, présent dans le filament, est égal à $\Delta n_z/L$. En utilisant la relation (21), on trouve.

$$\frac{\Delta n_z}{L} = D_e = V\,e\,\frac{m}{\pi\,\hbar^2\,\bar{k}} \tag{23}$$

Ainsi, le courant I prend la forme (voir la relation (15)) :

$$I = V\,e^2\,\frac{m\,\bar{v}}{\pi\,\hbar^2\,\bar{k}} = Ve^2\,\frac{\bar{P}}{\pi\hbar^2\,\bar{k}} \tag{24}$$

où $\bar{P} = m\bar{v}$ est la quantité de mouvement moyenne des électrons. Or, d'aprés la relation de de Broglie (12) on a

$$\bar{P} \;=\; \hbar\,\bar{k} \tag{25}$$

En injectant cette relation dans (24) et en se rappelant que $2\pi\hbar = h$, on trouve finalement

$$I \;=\; \frac{2\,e^2}{h}\;V \tag{26}$$

Pour dériver ce résultat, nous avons supposé qu'il n'y avait qu'un seul canal ouvert (guide d'onde mono-mode). S'il y a N canaux ouverts (multimode), alors

$$I \;=\; \frac{2\,e^2}{h}\;N\,V \quad ; \quad N = 1, 2, \cdots \tag{27}$$

En comparant avec la loi d'Ohm $V = RI$ on arrive à la relation

$$R = \frac{1}{N}\,\frac{h}{2\,e^2} \quad ; \quad G = \frac{2\,e^2}{h}\;N \quad ; \quad N = 1, 2, \cdots \tag{28}$$

où $G = 1/R$ est la conductivité électrique. Si un seul canal reste ouvert, le courant vaut

$$I_1 = \frac{2\;e^2}{h}\;V = G_q\;V \tag{29}$$

où

$$G_q = \frac{2\;e^2}{h} \tag{30}$$

est la conductance quantique fondamentale et universelle qui correspond à la résistance quantique fondamentale :

$$R_q = \frac{1}{G_q} = \frac{h}{2\;e^2} \tag{31}$$

En résumé la conductance d'un fin fil de métal est due à plusieurs effets. Premiérement, le principe de L. de Broglie qui implique que le nombre d'orbitales d'énergie et d'impulsion P_z donné est discret (guide d'onde monomode ou multimode). Deuxiémement, le principe d'exclusion de Pauli qui nous dit que chaque orbitale ne peut contenir au plus que 2 électrons de spin opposé. On trouve alors que pour une différence de potentiel donnée V, le flux d'électrons est fini et qu'il est proportionnel au nombre de canaux de conduction ouverts [3]. La conductance élémentaire que l'on trouve expérimentalement et théoriquement est trés simple (voir eq. 30). Notons en particulier que le facteur 2 dans G_q est dé au spin de l'électron. Cette expérience est remarquable par la simplicité du résultat et de la méthode expérimentale, et par le grand nombre de concepts quantiques différents auquel il faut faire appel pour la comprendre.

Appendice A : la taille et l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogéne.

L'énergie d'un électron, situé à une distance r d'un proton, s'écrit :

$$E = \frac{P^2}{2\,m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{32}$$

où $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\, J^{-1}\, m^{-1}\, C^2$ est la permittivité électrique du vide. Si l'on suppose que l'électron gravite (il est délocalisé) sur une orbite circulaire de rayon r (modéle de Bohr), alors tout se passe comme s'il était confiné dans une boite de longueur $2\pi r$ (périmétre de l'orbite), refermée sur elle méme (conditions aux bords périodiques). La valeur la plus grande de la longueur d'onde (état fondamental) est donc $\lambda_1 = 2\pi r$. Les autres valeurs possibles (états excités) sont : $\lambda_2 = \lambda_1/2$, $\lambda_3 = \lambda_1/3$, $\cdots$, $\lambda_n = \lambda_1/n$. Or, d'aprés de Broglie, l'énergie cinétique $E_{cin} = 2\pi^2\hbar^2/m\lambda^2$ (cf. eq. (4)). L'énergie de l'électron dans l'état excité n vaut donc :

$$E_n(r) = \frac{n^2\,\hbar^2}{2m\,r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{33}$$

Cependant quand r diminue, l'énergie potentielle diminue, mais l'énergie cinétique augmente. La taille de l'atome, dans l'état excité n, correspond donc à une valeur particuliére de r, notée r_n, qui minimise E. En résolvant $\partial_r E_n(r) = 0$, on trouve

$$r_n = 4\pi\,\epsilon_0\,n^2\,\frac{\hbar^2}{m\,e^2} \tag{34}$$

D'où les valeurs possibles de l'énergie :

$$E_n = -\frac{m}{2\,n^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\,\epsilon_0\,\hbar}\right)^2 \tag{35}$$

3. Notons que la résistance d'un fil de métal long et de grand diamétre est due à un tout autre effet : les électrons font de temps en temps - en fait trés rarement dans les bons conducteurs - des collisions inélastiques avec les atomes et perdent ainsi de l'énergie qui est transformée en chaleur. Ces collisions inélastiques sont à opposer aux collisions élastiques responsables de la masse effective. Dans le cas présent cet effet est négligeable car la longueur du fil est inférieure à la distance moyenne entre les collisions inélastiques. L'étude de la conduction dans des conducteurs fait l'objet de cours en 3ème année de Bac.

Ces résultats ont d'abord été obtenus par Bohr en quantifiant de maniére ad hoc le moment angulaire de l'électron par la relation : $r\,m\,v = n\,\hbar$, $n = 1, 2, \cdots$.

Le rayon r_B de l'atome d'hydrogéne dans son état fondamental est appelé "rayon de Bohr". En posant $n = 1$ dans (34), on trouve :

$$r_B \;=\; 4\pi\,\epsilon_0\,\frac{\hbar^2}{m\,e^2} \;\approx\; 0,529 \times 10^{-10}\;m \tag{36}$$

Et l'énergie correspondante (énergie de liaison de l'atome d'hydrogéne) vaut :

$$E \;=\; -\,\frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\,\epsilon_0\,\hbar}\right)^2 \;\approx\; -\,13,6\;eV \tag{37}$$

Ces valeurs sont conformes à celles obtenues expérimentalement. Il faut cependant remarquer que les résultats que nous avons dérivés ici sont basés sur l'hypothése du caractére strictement circulaire des orbitales électroniques, ce qui n'est vraie que pour les orbitales du type "S". La structure compléte de l'atome d'hydrogéne (forme et énergie des orbitales électroniques) ne peut s'obtenir que par les méthodes rigoureuses de la mécanique quantique.

Appendice B : masse effective

C'est une propriété remarquable des métaux que, malgré la présence des noyaux et des autres électrons, les électrons les moins liés se comportent comme des particules libres. (Ceci est à opposer aux isolants, dans lesquels les électrons ne peuvent pas ce déplacer). La conséquence la plus importante des noyaux et des autre électrons sur la propagation des électrons les moins liés est l'apparition de la masse effective. Cette masse effective peut se comprendre comme étant due aux diffusions élastiques (c'est à dire sans pertes d'énergie) des électrons sur les atomes du métal : les électrons peuvent rebondir sur les atomes. En quelque sorte les électrons dans un métal avancent comme des danseurs : 3 pas en avant, un pas en arriére, 3 pas en avant, 1 pas sur le côté, 3 pas en avant,...On comprend que dans ce cas la vitesse moyenne v_F et l'énergie cinétique E_F sont liées par une relation qui n'est pas la méme que pour un électron libre, d'où l'apparition de la masse effective. Au cours de physique du solide en Bac3 on étudiera en détail la propagation des électrons dans les métaux. On justifiera alors, à la fois théoriquement et expérimentalement, que les électrons dans un métal se comportent comme des particules libres avec une masse effective m.

Références

[1] F. Ott & J. Lunney, *Quantum Conduction : a Step-by-Step Guide*, Europhysics News, January/February 1998, pp. 13-16.

[2] J. M. Krans, J. M. van Ruitenbeek, V. V. Fisun, I. K. Yanson & L. J. de Jongh, *The signature of conductance quantization in metallic point contacts*, Nature **375** (29 June 1995) 767-769.

[3] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976).