Annexe 3

24

Guides d'ondes

24-1 La ligne de transmission

24-2 Le guide d'onde rectangulaire

24-3 La fréquence de coupure

24-4 La vitesse des ondes guidées

24-5 Observation des ondes guidées

24-6 Plomberie des guides d'ondes

24-7 Modes d'un guide d'ondes

24-8 Une autre façon de voir les guides d'ondes

24-1 La ligne de transmission

Dans le chapitre précédent nous avons étudié ce qui arrivait à des composants de circuits lorsqu'ils fonctionnent à de très hautes fréquences, et nous avons été amenés à voir qu'un circuit résonnant pouvait être remplacé par une cavité contenant des champs résonnants. La connexion entre un élément et un autre, de telle sorte que l'énergie électromagnétique soit transmise entre eux, constitue un autre problème technique intéressant. Dans les circuits à basse fréquence, la connexion se fait à l'aide de fils, mais cette méthode ne marche pas très bien en haute fréquence parce que dans ces conditions les circuits rayonnent de l'énergie dans tout l'espace environnant, et il est difficile de contrôler où passe l'énergie. Les champs s'étalent autour des fils; les courants et les tensions ne sont pas très bien «guidés» par les fils. Nous allons voir dans ce chapitre comment on peut interconnecter des éléments en haute fréquence. C'est tout au moins une façon de présenter notre sujet.

Une autre façon consisterait à dire que nous avons discuté du comportement des ondes dans l'espace libre. Il est temps maintenant de voir ce qui arrive quand des champs oscillants sont confinés en une ou plusieurs dimensions de l'espace. Nous allons découvrir un phénomène nouveau intéressant: quand les champs sont confinés en deux dimensions, et, libres d'aller selon la troisième dimension, ils se propagent en ondes. Ce sont des «ondes guidées» – qui font l'objet de ce chapitre.

Nous commençons par l'étude de la théorie générale de la *ligne de transmission*. La ligne électrique ordinaire qui traverse le paysage de pylône en pylône rayonne une partie de son énergie, mais les fréquences (50-60 cycles/sec) en sont si basses que cette perte n'est pas importante. On pourrait arrêter ce rayonnement en entourant la ligne d'un tube métallique, mais cette méthode ne serait pas commode pour des lignes de transport d'énergie parce que les tensions et les courants utilisés nécessiteraient un tube très grand, très cher et très lourd. On utilise donc de simples «lignes nues».

Pour des fréquences un peu plus hautes – disons quelques kilocycles – le rayonnement peut devenir sérieux. Il peut cependant être réduit en utilisant des lignes de transmission à «fils torsadés», comme on le fait pour les relations téléphoniques à courte distance. Cependant, à de plus hautes fréquences, le rayonnement devient vite intolérable, soit à cause des pertes d'énergie, soit parce que l'énergie apparaît dans d'autres circuits où elle est indésirable. Pour les fréquences comprises entre quelques kilocycles et quelques centaines de mégacycles, les signaux et l'énergie électromagnétiques sont habituellement transmis à l'aide de câbles coaxiaux constitués par un fil placé au milieu d'un cylindre «le conducteur externe» ou «armature». Bien que l'exposé qui suit s'applique à une ligne de transmission constituée par deux conducteurs parallèles de n'importe quelle forme, nous nous y référerons à une ligne coaxiale.

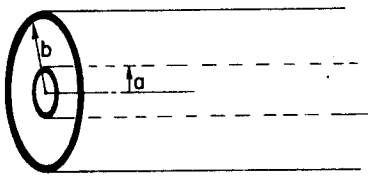

Fig. 24-1. Une ligne de transmission coaxiale.

Nous prenons la ligne coaxiale la plus simple, celle qui a un conducteur central, que nous supposerons constitué d'un mince cylindre creux, et un conducteur externe qui est un autre cylindre mince de même axe que le conducteur interne (Fig. 24-1). Nous commençons par étudier approximativement le comportement de la ligne aux fréquences relativement basses. Nous avons déjà décrit un peu ce comportement à basse fréquence quand nous avons dit précédemment que deux tels conducteurs possédaient une certaine inductance par unité de longueur et une certaine capacité par unité de longueur. On peut, effectivement, décrire le comportement à basse fréquence de n'importe quelle ligne de transmission en donnant son inductance par unité de longueur, L_0, et sa capacité par unité de longueur, C_0. Nous pouvons alors analyser la ligne en la considérant comme cas limite du filtre L-C discuté au paragraphe 22-6. Nous pouvons construire un filtre qui imite la ligne en prenant de petits éléments en série, $L_0\Delta x$, et de petites capacités en parallèle $C_0\Delta x$, où Δx est l'élément de longueur de la ligne. En utilisant nos résultats pour le filtre infini nous voyons qu'il y aura propagation de signaux électriques le long de la ligne. Cependant, plutôt que d'utiliser cette façon d'aborder le problème, nous allons considérer la ligne en faisant intervenir une équation différentielle.

Voyons donc ce qui se passe en deux points voisins de la ligne de transmission, disons en deux points situés aux distances x et $x + \Delta x$ de l'origine de la ligne. Soit $V(x)$ la différence de potentiel entre les deux conducteurs et $I(x)$ le courant dans le conducteur «chaud» (voir Fig. 24-2). Si le courant de la ligne

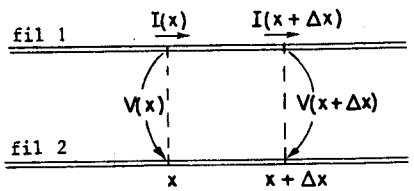

Fig. 24-2. Courants et tensions dans une ligne de transmission.

varie, l'inductance nous donne pour la petite portion de ligne comprise entre x et $x + \Delta x$ une chute de tension égale à

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0\,\Delta x\,\frac{dI}{dt}.$$

Ou encore, en passant à la limite lorsque $\Delta x \to 0$, nous obtenons

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0\,\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{24.1}$$

Le courant variable crée un gradient de tension.

En revenant encore à la figure, on voit que si la tension en x varie, il faut qu'on fournisse une certaine charge à la capacité dans cette région. Si nous considérons le petit tronçon de ligne compris entre x et $x + \Delta x$, nous voyons que sa charge vaut $q = C_0\Delta x V$. La variation de cette charge par unité de temps est donnée par $C_0\Delta x dV/dt$, mais la charge ne varie que si le courant $I(x)$ entrant dans l'élément est différent du courant $I(x + \Delta x)$ qui en sort. En appelant ΔI cette différence nous avons

$$\Delta I = -C_0\,\Delta x\,\frac{dV}{dt}.$$

En passant à la limite lorsque $\Delta x \to 0$, nous obtenons

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0\,\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{24.2}$$

La conservation de la charge implique donc que le gradient du courant soit proportionnel à la variation de la tension par unité de temps.

Les équations (24.1) et (24.2) sont alors les équations de base d'une ligne de transmission. Si on veut, on peut les modifier pour y inclure les effets de résistance dans les conducteurs ou de perte de charge à travers l'isolant entre les conducteurs, mais pour l'instant, nous n'allons garder que l'exemple simple.

Les deux équations de la ligne de transmission peuvent être combinées en en dérivant l'une par rapport à t et l'autre par rapport à x et en éliminant soit V soit I. Nous avons alors ou bien

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{24.3}$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{24.4}$$

Nous reconnaissons une fois de plus l'équation d'onde en x. Pour une ligne uniforme, la tension (et le courant) se propage sous forme d'onde le long de la ligne. La tension le long de la ligne doit être de la forme $V(x, t) = f(x - vt)$ ou $V(x, t) = g(x + vt)$, ou une somme des deux. Quelle est la vitesse v? Nous savons que le coefficient du terme $\partial^2/\partial t^2$ est précisément $1/v^2$, donc

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \tag{24.5}$$

Nous allons vous laisser le soin de montrer que la tension *pour chacune des ondes* d'une ligne est proportionnelle au courant de cette onde et que la constante de proportionnalité est exactement l'impédance caractéristique z_0. En désignant par V_+ et I_+ la tension et le courant pour une onde se propageant dans la direction des x positifs, vous devriez obtenir

$$V_+ = z_0 I_+. \tag{24.6}$$

De même, pour l'onde se propageant vers les x négatifs la relation est

$$V_- = -z_0 I_-.$$

L'impédance caractéristique – comme nous l'avons vu à partir des équations des filtres – est donnée par

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \tag{24.7}$$

et est, par conséquent, une résistance pure.

Pour trouver la vitesse de propagation v et l'impédance caractéristique z_0 d'une ligne de transmission, il faut connaître l'inductance et la capacité par unité de longueur. Nous pouvons les calculer facilement pour un câble coaxial, nous verrons ainsi comment on fait. Pour l'inductance, nous suivons les idées du paragraphe 17-8 et posons $\frac{1}{2}LI^2$ égal à l'énergie magnétique que nous obtenons en intégrant $\epsilon_0 c^2 B^2/2$ sur le volume. Supposons que le conducteur central transporte le courant I; nous savons alors que $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$, où r est la distance à l'axe. En prenant comme élément de volume une couche cylindrique d'épaisseur dr et de longueur l, nous avons pour l'énergie magnétique

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 l\,2\pi r\,dr,$$

où a et b sont respectivement les rayons des conducteurs intérieur et extérieur. En calculant l'intégrale, nous obtenons

$$U = \frac{I^2 l}{4\pi\epsilon_0 c^2}\ln\frac{b}{a}. \tag{24.8}$$

Posant l'énergie égale à $\frac{1}{2}LI^2$, nous trouvons

$$L = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 c^2}\ln\frac{b}{a}. \tag{24.9}$$

L est, comme il se doit, proportionnelle à la longueur l de la ligne de sorte que l'inductance par unité de longueur L_0 est

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}. \tag{24.10}$$

Nous avons calculé la charge sur un condensateur cylindrique (voir paragraphe 12-2). Maintenant, en divisant la charge par la différence de potentiel, nous obtenons

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

La capacité par unité de longueur C_0 est C/l. En combinant ce résultat avec l'Eq. (24.10), nous voyons que le produit L_0C_0 est exactement égal à $1/c^2$, donc $v = 1/\sqrt{L_0C_0}$ est égal à C. L'onde parcourt la ligne à la vitesse de la lumière. Notons bien que ce résultat dépend de nos hypothèses: (a) qu'il n'y a pas de matériaux diélectriques ou magnétiques dans l'espace compris entre les conducteurs, et (b) que les courants se sont tous localisés sur les surfaces des conducteurs (comme ce serait le cas pour des conducteurs parfaits). Nous verrons plus tard que pour de bons conducteurs en haute fréquence, tous les courants se répartissent sur les surfaces comme ils le feraient sur un conducteur parfait, cette hypothèse est donc valable.

Il est intéressant de noter maintenant que pourvu que les hypothèses (a) et (b) soient correctes, le produit L_0C_0 est égal à $1/c^2$ pour *n'importe quelle* paire de conducteurs parallèles – même, par exemple, pour un conducteur intérieur hexagonal placé n'importe où dans un conducteur extérieur elliptique. Pourvu que la section droite soit constante et que l'espace entre les conducteurs contienne aucune matière, les ondes se propagent à la vitesse de la lumière.

Aucune remarque générale semblable ne peut être faite à propos de l'impédance caractéristique. Pour la ligne coaxiale, elle vaut

$$z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}. \tag{24.11}$$

Le facteur $1/\epsilon_0 c$ a les dimensions d'une résistance et est égal à 120π ohms. Le facteur géométrique $\ln(b/a)$ ne dépend que logarithmiquement des dimensions, de sorte que pour la ligne coaxiale – et pour la plupart des lignes – l'impédance caractéristique a des valeurs typiques allant de 50 ohms à quelques centaines d'ohms.

24-2 Le guide d'ondes rectangulaire

Ce dont nous voulons parler maintenant semble, à première vue, un phénomène surprenant: si le conducteur central est retiré d'une ligne coaxiale, elle peut encore transporter de la puissance électromagnétique. En d'autres termes, à des fréquences suffisamment élevées, un tube vide marche tout aussi bien qu'un tube contenant des fils. Ceci est relié à la façon mystérieuse dont un circuit résonnant condensateur – inductance peut être remplacé en haute fréquence par une simple boîte.

Bien que cela puisse paraître remarquable quand on a considéré une ligne de transmission comme une distribution d'inductances et de capacités, nous savons tous que des ondes électromagnétiques peuvent se propager dans un tube métallique creux. Si le tube est droit, on peut *voir* à travers! Donc des ondes électromagnétiques peuvent certainement traverser un tube. Mais nous savons aussi qu'il n'est pas possible de transmettre des ondes de basse fréquence (énergie électrique ou téléphone) à travers un simple tube métallique. C'est donc que les ondes électromagnétiques ne vont le traverser que si leur longueur d'onde est assez courte. Nous nous proposons donc de discuter le cas limite des plus grandes longueurs d'onde (ou des plus basses fréquences) qui peuvent traverser un tube de dimensions données. Comme le tube est alors utilisé pour transporter des ondes, on l'appelle un *guide d'ondes*.

Nous commencerons par un tuyau rectangulaire, parce que c'est le cas le plus simple à analyser. Nous le traiterons d'abord mathématiquement et nous y reviendrons plus tard pour étudier le problème d'une façon beaucoup plus élémentaire. Cependant, l'approche la plus élémentaire

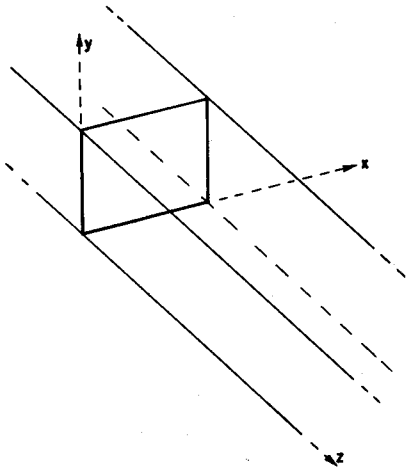

Fig. 24-3. Les coordonnées choisies dans le cas du guide d'ondes rectangulaire.

ne peut s'appliquer facilement qu'à un guide rectangulaire. Les phénomènes de base sont les mêmes pour un guide en général de forme arbitraire, de sorte que le raisonnement mathématique est fondamentalement plus solide.

Notre problème est donc de trouver quelles sortes d'ondes peuvent exister à l'intérieur d'un tube rectangulaire. Choisissons d'abord des coordonnées commodes; prenons l'axe des z dans le sens de la longueur du tube, et les axes x et y parallèles aux deux côtés comme le montre la Fig. 24-3.

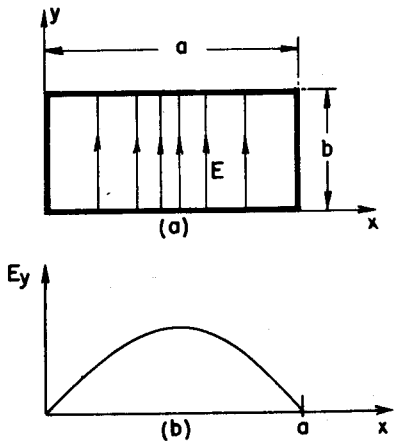

Fig. 24-4. Le champ électrique dans le guide d'ondes pour une valeur donnée de z.

Nous savons que lorsque les ondes lumineuses traversent le tube, elles possèdent un champ électrique tranversal; supposons donc qu'on recherche d'abord les solutions où **E** est perpendiculaire à z, disons avec une seule composante, E_y. Ce champ électrique va varier à travers le guide; en fait il doit s'annuler sur les côtés parallèles à l'axe des y, parce

que les courants et les charges dans un conducteur s'ajustent toujours de façon à ce qu'il n'existe pas de composante tangentielle du champ électrique à la surface d'un conducteur. Donc E_y va varier avec x selon une courbe en forme d'arche, comme le montre la Fig. 24-4. C'est peut-être la fonction de Bessel que nous avons trouvée pour une cavité? Non, parce que la fonction s'applique aux systèmes à géométrie cylindrique. Dans les systèmes à géométrie rectangulaire, les ondes sont d'habitude de simples fonctions harmoniques, de sorte que nous devrions essayer quelque chose comme $\sin k_x x$.

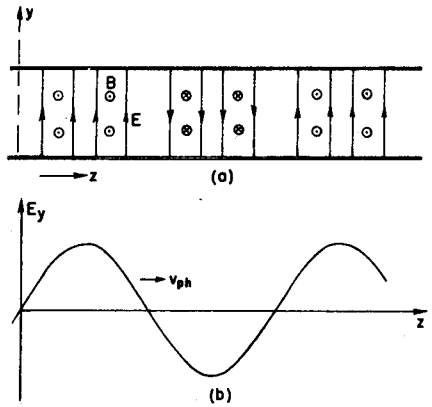

Fig. 24-5. Représentation du champ en fonction de z dans le guide d'ondes.

Comme nous voulons des ondes qui se propagent dans le guide, nous prévoyons que le champ va alterner entre des valeurs positives et négatives le long de l'axe des z, comme sur la Fig. 24-5, et que ces oscillations vont se propager le long du guide à une vitesse v. Si nous avons des oscillations à une certaine fréquence ω, nous pouvons penser que l'onde va varier avec z comme $\cos(\omega t - k_z z)$ ou, pour utiliser une forme mathématique plus commode, comme $e^{i(\omega t - k_z z)}$. Cette fonction de z représente une onde se propageant à la vitesse $v = \omega/k_z$ (voir chapitre 29, Vol. I).

Nous pouvons alors penser que l'onde dans le guide va avoir la forme mathématique suivante:

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{24.12}$$

Voyons si cette hypothèse satisfait aux équations du champ convenable. D'abord, le champ électrique ne doit pas avoir de composante tangentielle sur les conducteurs. Notre champ satisfait cette condition; il est perpendiculaire au plafond et au plancher et il est nul sur les deux faces latérales. Bon, il l'est si on choisit k_x de façon à ce qu'une demi-période de $\sin k_x x$ coïncide exactement avec la largeur du guide – c'est-à-dire si

$$k_x a = \pi. \tag{24.13}$$

Il y a d'autres possibilités, telles que $k_x a = 2\pi$, 3π, ..., ou, en général,

$$k_x a = n\pi, \tag{24.14}$$

où n est un entier quelconque. Ces cas représentent diverses dispositions compliquées du champ, mais pour l'instant ne prenons que la plus simple d'entre elles, $k_x = \pi/a$, où a est la largeur intérieure du guide.

La divergence de **E** doit être nulle dans l'espace libre intérieur au guide, puisqu'il n'y a pas de charges. Notre **E** n'a qu'une composante y et ne varie pas avec y, nous avons donc bien $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Finalement, notre champ électrique doit être compatible avec le reste des équations de Maxwell dans l'espace libre intérieur au guide. Il revient au même de dire qu'il doit satisfaire à l'équation de propagation.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \tag{24.15}$$

Il faut voir si notre idée, l'Eq. (24.12), va marcher. La dérivée seconde de E_y en fonction de x est précisément $-k_x^2 E_y$. La dérivée seconde par rapport à y est nulle, puisque rien ne dépend de y. La dérivée seconde par rapport à z est $-k_z^2 E_y$, et la dérivée seconde par rapport à t est $-\omega^2 E_y$. L'équation (24.15) donne alors

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

A moins que E_y ne soit nul partout (ce qui n'est pas très intéressant), cette équation est correcte si

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \tag{24.16}$$

Nous avons déjà fixé k_x, de sorte que cette équation nous montre qu'il peut y avoir des ondes du type que nous avons supposé si k_z est relié à la fréquence ω de façon que l'Eq. (24.16) soit satisfaite – en d'autres termes, si

$$k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}. \tag{24.17}$$

Les ondes que nous avons décrites se propagent dans la direction des z avec cette valeur de k_z.

Le nombre d'onde k_z que nous avons tiré de l'Eq. (24.17) nous donne, pour une fréquence ω donnée, la vitesse à laquelle les nœuds de l'onde se propagent dans le guide. La vitesse de phase est

$$v = \frac{\omega}{k_z}. \tag{24.18}$$

Vous vous rappelez que la longueur d'onde λ d'une onde en mouvement est donnée par $\lambda = 2\pi v/\omega$, de sorte que k_z est aussi égal à $2\pi/\lambda_g$, où λ_g est la longueur d'onde des oscillations dans la direction de z – la «longueur d'onde dans le guide». La longueur d'onde dans le guide est différente, évidemment, de la longueur d'onde des ondes électromagnétiques de même fréquence dans l'espace libre. Si nous appelons λ_0 la longueur d'onde dans l'espace libre, égale à $2\pi c/\omega$, nous pouvons écrire l'Eq. (24.17)

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}. \tag{24.19}$$

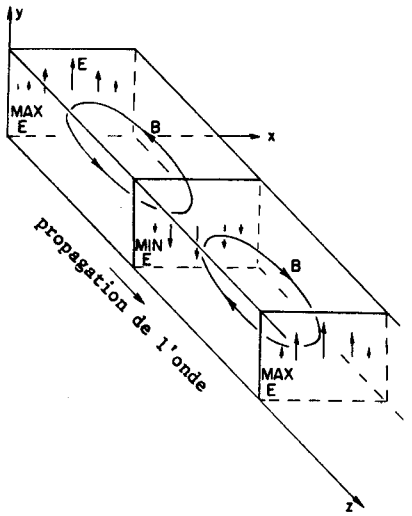

Fig. 24-6. Le champ magnétique dans le guide d'ondes.

En plus des champs électriques, des champs magnétiques vont se propager avec l'onde, mais nous n'allons pas nous ennuyer à chercher tout de suite une expression pour eux. Comme $c^2\nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E}/\partial t$, les lignes de champ de **B** circulent autour des régions où $\partial \mathbf{E}/\partial t$ est le plus grand, c'est-à-dire à mi-chemin entre le maximum et le minimum de **E**. Les boucles de **B** vont se trouver parallèles au plan xz et entre les pics et les creux de **E**, comme indiqué sur la Fig. 24-6.

24-3 La fréquence de coupure

En résolvant l'Eq. (24.16) pour k_z, il devrait y avoir en réalité deux racines – une plus et une moins. Nous devrions écrire

$$k_z = \pm\sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}. \tag{24.20}$$

Les deux signes signifient simplement qu'il peut y avoir des ondes qui se propagent avec une vitesse de phase négative (vers les z négatifs), comme des ondes qui se propagent dans la direction positive du guide. Naturellement, les ondes doivent pouvoir aller dans chacune des directions. Comme les deux types d'ondes peuvent être présents au même moment, il va y avoir possibilité d'ondes stationnaires.

Notre équation pour k_z nous montre aussi que de plus hautes fréquences donnent de plus grandes valeurs de k_z, et donc de plus petites longueurs d'onde, jusqu'à ce qu'à la limite des grands ω, k devienne égal à ω/c qui est la valeur que nous attendrions pour des ondes dans l'espace libre. La lumière qu'on «voit» à travers un tuyau se propage encore à la vitesse c. Mais notez maintenant que si nous allons vers les basses fréquences, il se passe quelque chose de bizarre. D'abord la longueur d'onde devient de plus en plus grande, mais si ω devient trop petit la quantité sous le radical dans l'Eq. (24.20) devient brusquement négative. Ceci arrivera dès que ω deviendra inférieur à $\pi c/a$ – c'est-à-dire quand λ_0 deviendra plus grand que $2a$. En d'autres termes, quand

la fréquence devient plus petite qu'une certaine fréquence critique $\omega_c = \pi c/a$ le nombre d'onde k_z (et aussi λ_g) devient imaginaire et nous n'avons plus de solution. Ou en avons-nous une? Qui a dit que k_z devait être réel? Que se passe-t-il s'il devient imaginaire? Nos équations du champ sont encore satisfaites. Peut-être qu'un k_z imaginaire représente aussi une onde.

Supposez que ω *est* inférieur à ω_c; nous pouvons alors écrire

$$k_z = \pm ik', \tag{24.21}$$

où k' est un nombre réel positif:

$$k' = \sqrt{(\pi^2/a^2) - (\omega^2/c^2)}. \tag{24.22}$$

Si nous revenons maintenant à notre expression, l'Eq. (24.12) pour E_y, nous avons

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t \mp ik'z)}, \tag{24.23}$$

que nous pouvons écrire

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{\pm k'z} e^{i\omega t}. \tag{24.24}$$

Cette expression donne un champ **E** qui oscille en fonction du temps comme $e^{i\omega t}$ mais qui varie avec z comme $e^{\pm k'z}$. Il décroît ou croît avec z régulièrement comme une exponentielle réelle. Dans notre calcul nous ne nous sommes pas occupés des sources qui donnent naissance aux ondes, mais il doit bien y avoir, évidemment, une source quelque part dans le guide. Le signe qui va avec k' doit être celui qui fait décroître le champ quand la distance à la source des ondes augmente.

Ainsi pour des fréquences inférieures à $\omega_c = \pi c/a$, il n'y a *pas* d'ondes qui se propagent dans le guide, les champs oscillants ne pénètrent dans le guide que sur une longueur de l'ordre de $1/k'$. Pour cette raison, la fréquence ω_c est dite « fréquence de coupure » du guide. En regardant l'Eq. (24.22), nous voyons que pour des fréquences juste un peu inférieures à ω_c, le nombre k' est petit et que les champs peuvent pénétrer loin dans le guide. Mais si ω est très inférieur à ω_c, le coefficient exponentiel k' est égal à π/a et le champ disparaît extrêmement rapidement, comme le montre la Fig. 24-7. Le champ decroît d'un facteur $1/e$ sur la

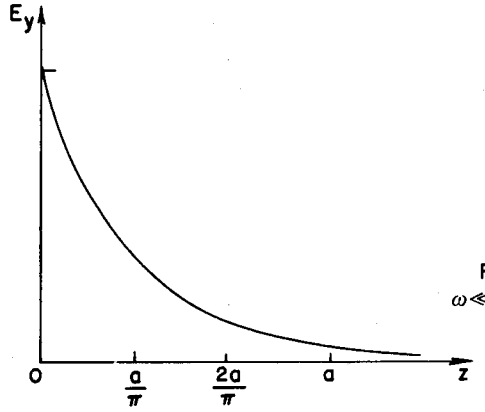

Fig. 24-7. Variations de E_y avec z pour $\omega \ll \omega_c$.

longueur a/π, c'est-à-dire sur seulement un tiers environ de la largeur du guide. Les champs pénètrent à une très petite distance de la source.

Nous tenons à insister sur un aspect intéressant de notre analyse des ondes guidées – l'apparition du nombre d'onde imaginaire k_z. Normalement, quand on résout une équation en physique et qu'on trouve un nombre imaginaire, il n'a aucune signification physique. Pour des *ondes*, cependant, un nombre imaginaire *signifie* quelque chose. L'équation d'onde est encore satisfaite; elle signifie seulement que la solution donne des champs qui décroissent exponentiellement au lieu d'ondes progressives. Ainsi dans tout problème d'onde où k devient imaginaire pour une fréquence quelconque, cela signifie que la forme de l'onde change – l'onde sinusoïdale devient exponentielle.

24-4 La vitesse des ondes guidées

La vitesse des ondes que nous avons utilisée ci-dessus est la vitesse de phase, qui est la vitesse d'un nœud de l'onde; elle est fonction de la fréquence. En combinant les Eq. (24.17) et (24.18), nous pouvons écrire:

$$v_{\text{phase}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}}. \tag{24.25}$$

Pour des fréquences au-dessus de la coupure – là où des ondes progressives existent – ω_c/ω est plus petit que un, et v_{phase} est réelle et *plus grande* que la vitesse de la lumière.

Nous avons déjà vu dans le chapitre 48 du Vol. I que des vitesses *de phase* plus grandes que la vitesse de la lumière étaient possibles, parce que ce ne sont que les nœuds de l'onde qui se déplacent et non l'énergie ou l'information. Pour savoir à quelle vitesse les *signaux* vont se déplacer, nous devons calculer la vitesse des impulsions ou des modulations dues à l'interférence d'une onde d'une certaine fréquence avec une ou plusieurs ondes de fréquences légèrement différentes (voir chapitre 48, Vol. I). Nous avons appelé la vitesse de l'enveloppe d'un tel groupe d'ondes la vitesse de groupe; ce n'est pas ω/k mais $d\omega/dk$:

$$v_{\text{groupe}} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{24.26}$$

En prenant la dérivée de l'Eq. (24.17) par rapport à ω, et en inversant pour avoir $d\omega/dk$, on trouve que

$$v_{\text{groupe}} = c\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}, \tag{24.27}$$

qui est inférieur à la vitesse de la lumière.

La moyenne géométrique de v_{phase} et v_{groupe} est exactement c, la vitesse de la lumière:

$$v_{\text{phase}}\, v_{\text{groupe}} = c^2. \tag{24.28}$$

Ceci est curieux, parce que nous avons vu une relation semblable en mécanique quantique. Pour une particule de vitesse quelconque – même relativiste – la quantité de mouvement p et l'énergie U sont reliées par

$$U^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{24.29}$$

Mais en mécanique quantique l'énergie est $\hbar\omega$, et la quantité de mouvement est $\hbar/\lambda\!\!\!^{-}$, qui est égal à $\hbar k$; l'Eq. (24.29) peut donc s'écrire

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}, \tag{24.30}$$

ou

$$k = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (m^2c^2/\hbar^2)}, \tag{24.31}$$

qui paraît très semblable à l'Eq. (24.17)... Intéressant!

La vitesse de groupe des ondes est aussi la vitesse à laquelle l'énergie est transportée le long du guide. Si nous voulons trouver le flux d'énergie qui se propage dans le guide, nous pouvons l'obtenir à partir de la densité d'énergie multipliée par la vitesse de groupe. Si la valeur quadratique moyenne du champ électrique est E_0, la densité moyenne de l'énergie électrique est $\epsilon_0 E_0^2/2$. Il y a aussi de l'énergie associée au champ magnétique. Nous n'allons pas le démontrer ici, mais dans toute cavité ou guide les énergies électriques et magnétiques sont égales, de sorte que la densité totale d'énergie électromagnétique est $\epsilon_0 E_0^2$. La puissance dU/dt transmise par le guide est alors

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 abv_{\text{groupe}} \tag{24.32}$$

(Nous verrons plus tard une autre méthode, plus générale, pour obtenir le flux d'énergie.)

24-5 Observation des ondes guidées

De l'énergie peut être transmise vers l'intérieur d'un guide d'onde par une sorte d'«*antenne*». Par exemple, un petit fil vertical ou «pointe» peut faire l'affaire. La présence des ondes guidées peut être observée en captant un peu de l'énergie électromagnétique avec une petite «antenne» réceptrice, qui peut à nouveau être une petite pointe de fil ou une petite boucle. Nous montrons, sur la Fig. 24-8, un guide avec des parties enlevées pour montrer une pointe excitatrice et une sonde réceptrice. La pointe excitatrice peut être reliée à un générateur de signaux à l'aide d'un câble coaxial, et la sonde réceptrice peut être connectée à un détecteur par un câble semblable. Il est habituellement commode d'insérer la sonde réceptrice à travers une longue et mince fente dans le guide, comme le montre la Fig. 24-8. La sonde peut alors être déplacée vers l'avant ou l'arrière le long du guide pour obtenir des échantillonnages de champs en différents points.

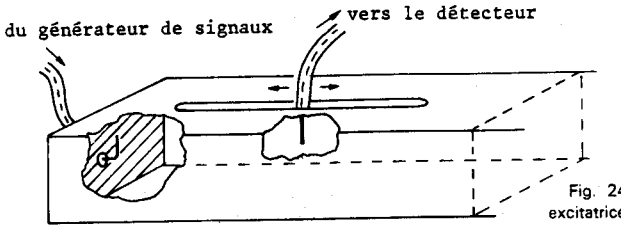

Fig. 24-8. Guide d'ondes avec pointe excitatrice et sonde réceptrice.

Si le générateur de signaux est réglé à une certaine fréquence ω plus grande que la fréquence de coupure ω_c, il y aura des ondes progressives se propageant dans le guide à partir de la pointe excitatrice. Elles seront les seules ondes présentes si le guide est infiniment long, ce qu'on

peut réaliser effectivement en terminant le guide sur un dispositif absorbant soigneusement calculé de façon à ce qu'il n'y ait pas de réflexions venant de cette extrémité. Alors, comme le détecteur mesure la moyenne temporelle des champs au voisinage de la sonde, il recueillera un signal ne dépendant pas de la position le long du guide; son signal de sortie sera proportionnel à la puissance qui aura été transmise.

Si maintenant l'extrémité du guide est telle qu'elle produise une onde réfléchie – si, pour prendre un exemple extrême, on le ferme par une plaque de métal – il y aura une onde réfléchie en plus de l'onde incidente primitive. Ces deux ondes vont interférer et produire une onde stationnaire dans le guide, semblable aux ondes stationnaires sur une corde dont nous avons discuté au chapitre 49 du Vol. I. Alors, quand on déplace la sonde le long de la ligne, les indications du détecteur vont croître et décroître périodiquement, indiquant un maximum des champs à chaque ventre de l'onde stationnaire et un minimum à chaque nœud. La distance entre deux nœuds (ou ventres) successifs est exactement $\lambda_g/2$. Ceci constitue une façon commode de mesurer la longueur d'onde du guide. Si maintenant on rapproche la fréquence de ω_c, les distances entre les nœuds augmentent, ce qui montre que la longueur d'onde dans le guide augmente, comme le prédit l'Eq. (24.19).

Supposons maintenant que le générateur de signaux est placé à une fréquence juste un peu inférieure à ω_c. Le signal de sortie du détecteur va décroître graduellement quand on éloigne la sonde le long du guide. Si on baisse encore un peu la fréquence, l'intensité du champ va tomber rapidement, en suivant la courbe de la Fig. 24-7, montrant qu'il n'y a pas d'ondes progressives.

24-6 Plomberie des guides d'ondes

Une utilisation pratique importante des guides d'onde est celle de la transmission de puissance en haute fréquence comme, par exemple, pour coupler l'oscillateur de haute fréquence ou l'amplificateur de sortie d'un radar à une antenne. En fait, l'antenne elle-même consiste habituellement en un réflecteur parabolique alimenté en son foyer par un guide d'onde éclaté à son extrémité de façon à former un «pavillon» qui rayonne les ondes arrivant le long du guide. Bien que les hautes fréquences puissent être transmises le long d'un coaxial, un guide d'ondes est préférable pour transmettre de grandes quantités d'énergie. D'abord, la puissance maximum qui peut être transmise le long d'une ligne est limitée par la rupture de l'isolant (solide ou gaz) entre les conducteurs. Pour une puissance donnée, les intensités des champs dans un guide sont habituellement inférieures à ce qu'elles sont dans un câble coaxial, de sorte que de plus grandes puissances peuvent être transmises avant qu'il y ait rupture. Deuxièmement, les pertes de puissance dans le câble coaxial sont habituellement plus grandes que dans un guide d'ondes. Dans un coaxial, il faut des isolants pour soutenir le conducteur central, et il s'y produit une perte d'énergie particulièrement aux hautes fréquences. De plus, les densités de courant sur le conducteur central sont assez grandes et comme les pertes varient comme le *carré* de la densité de courant, les courants plus faibles qui apparaissent sur les parois du guide provoquent des pertes d'énergie plus faibles. Pour réduire ces pertes au minimum, les surfaces intérieures du guide sont souvent plaquées d'un matériau à haute conductivité, comme l'argent.

Le problème du raccordement d'un «circuit» à des guides d'ondes est très différent du problème correspondant des circuits à basses fréquences, et porte couramment le nom de «plomberie» en microondes. De nombreux dispositifs spéciaux ont été développés à cet

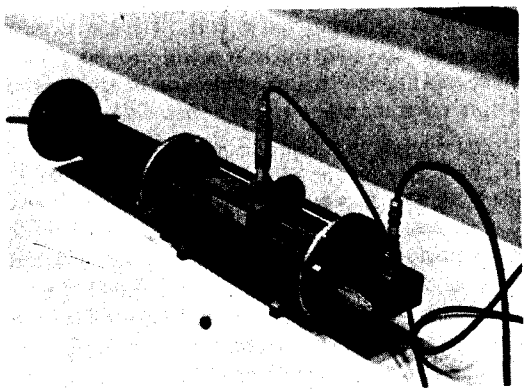

Fig. 24-9. Éléments de guide d'ondes reliés par des flasques.

effet. Par exemple, deux sections d'un guide d'ondes sont habituellement reliées au moyen de flasques, comme on peut le voir sur la Fig. 24-9. De telles connexions peuvent toutefois créer de sérieuses pertes d'énergie parce que les courants superficiels doivent passer à travers le joint, qui peut avoir une résistance relativement grande. Une façon d'éviter de telles pertes est de fabriquer les flasques comme le montre la coupe de la Fig. 24-10. Un petit espace est laissé entre deux sections adjacentes du guide, et une rainure est découpée dans la face de l'un des flasques pour constituer une petite cavité du type indiqué dans la Fig. 23-16 (c). Les dimensions sont choisies de façon à ce que cette cavité soit résonnante à la fréquence utilisée. Cette cavité résonnante présente une forte « impédance » aux courants, de sorte qu'un courant relativement faible traverse les joints métalliques (en *a* dans la Fig. 24-10). Les forts courants du guide chargent et déchargent simplement la « capacité » de l'interstice (en *b* sur la figure), où il y a peu de dissipation d'énergie.

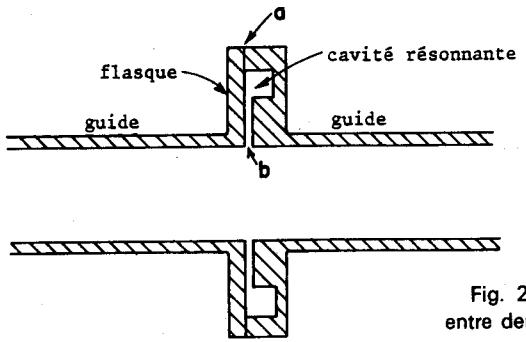

Fig. 24-10. Connexion à faibles pertes entre deux éléments de guide d'ondes.

Supposez que vous désirez terminer un guide d'ondes de façon à ce qu'il n'y ait pas d'ondes réfléchies. Vous devez alors mettre quelque chose au bout qui imite une longueur infinie de guide. Vous avez besoin d'une « extrêmité » qui joue pour le guide le rôle de l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission – quelque chose qui absorbe les ondes incidentes sans provoquer de réflexions. Le guide se comportera alors comme s'il se prolongeait indéfiniment. De telles extrêmités se fabriquent en plaçant à l'intérieur du guide des coins de matériau

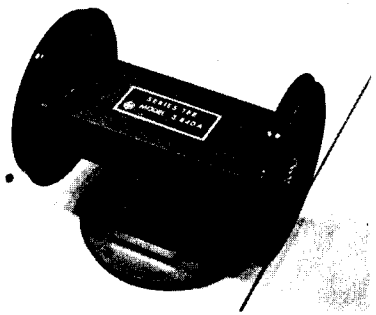

Fig. 24-11. Guide d'ondes en « T ». (Les flasques ont des capuchons de plastique pour que l'intérieur reste propre quand le « T » n'est pas utilisé.)

résistant, soigneusement étudiés pour absorber l'énergie de l'onde en ne donnant presque pas d'ondes réfléchies.

Si vous voulez connecter *trois* choses ensemble – par exemple, une seule source à deux antennes différentes – vous pouvez utiliser un « T » comme celui de la Fig. 24-11. La puissance apportée au centre de la section du « T » sera partagée et sortira par les deux bras latéraux (et il peut y avoir aussi des ondes réfléchies). Vous pouvez voir quantitativement sur les schémas de la Fig. 24-12 que les champs vont se déformer quand ils parviendront à l'extrêmité de la section d'entrée et constituer des champs électriques qui vont créer des ondes se propageant dans les deux bras. Suivant que les champs électriques dans le guide sont parallèles ou perpendiculaires à la « barre du haut » du « T », les champs à la jonction seront, en gros, comme indiqué en (a) ou (b) sur la Fig. 24-12.

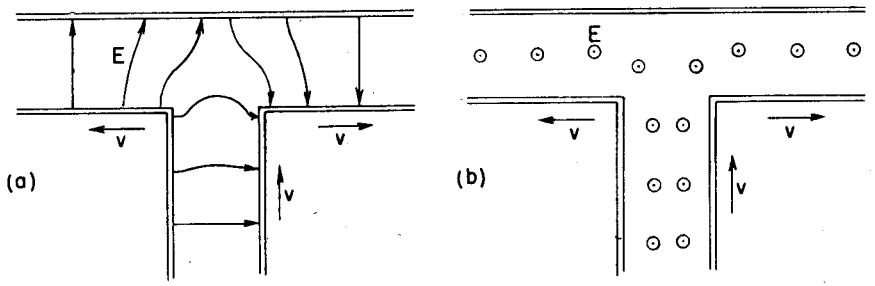

Fig. 24-12. Les champs électriques dans un guide d'ondes en « T » dans deux orientations possibles du champ.

Nous allons décrire pour finir un système appelé « coupleur unidirectionnel », très utile pour expliquer ce qui se passe quand on a monté une association compliquée de guides d'ondes. Supposons qu'on veuille savoir quel chemin vont suivre les ondes dans une certaine section du guide – on pourrait se demander, par exemple, s'il y a ou non une onde réfléchie intense. Le coupleur unidirectionnel prend une faible fraction de la puissance d'un guide s'il y a une onde se propageant dans une direction mais aucune si l'onde se propage dans l'autre direction. En connectant la sortie du coupleur à un détecteur, on peut mesurer la puissance « dans un sens » à l'intérieur du guide.

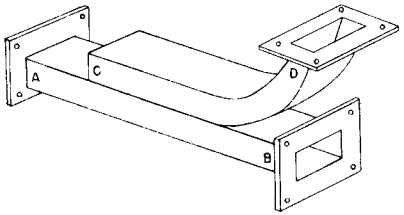

Fig. 24-13. Coupleur unidirectionnel.

La Fig. 24-13 est le dessin d'un coupleur unidirectionnel, un morceau de guide d'ondes *AB* est soudé le long d'une de ses faces à un morceau d'un autre guide d'ondes *CD*. Le guide *CD* est courbé vers l'extérieur pour qu'il y ait de la place pour les flasques de connexion. Avant que les guides ne soient soudés l'un à l'autre, deux trous (ou plus) ont été percés dans chaque guide (les uns en face des autres) de façon à ce que les champs du guide principal *AB* puissent être couplés au guide secondaire. S'il n'y avait qu'un seul trou, les ondes seraient envoyées dans les deux directions et seraient les mêmes quel que soit le sens dans lequel l'onde se propage dans le guide primaire. Mais s'il y a *deux* trous distants l'un de l'autre du quart de la longueur d'onde dans le guide, ils constituent deux sources en quadrature de phase. Vous rappelez-vous que nous avons étudié dans le chapitre 29 du Vol. I l'interférence de deux ondes issues de deux antennes distantes de $\lambda/4$ et excitées avec un déphasage temporel de 90°? Nous avons trouvé que les ondes se retranchent dans une direction et s'ajoutent dans la direction opposée. Il va se produire la même chose ici. L'onde produite dans le guide *CD* va se propager dans la même direction que l'onde dans *AB*.

Si l'onde du guide primaire se propage de *A* vers *B*, il y aura une onde à la sortie *D* du guide secondaire. Si l'onde se propage de *B* vers *A* dans le guide primaire, il y aura une onde se propageant vers l'extrémité *C* du guide secondaire. Cette extrémité est fermée de façon à ce que cette onde soit absorbée et il n'y a pas d'onde à la sortie du coupleur.

24-7 Modes d'un guide d'ondes

L'onde que nous avons choisi d'analyser est une solution particulière des équations du champ. Il y en a beaucoup d'autres. Chaque solution est un « mode » du guide d'ondes. Par exemple, la variation en fonction de x de notre champ était exactement une demi-période d'une onde sinusoïdale. Il existe une

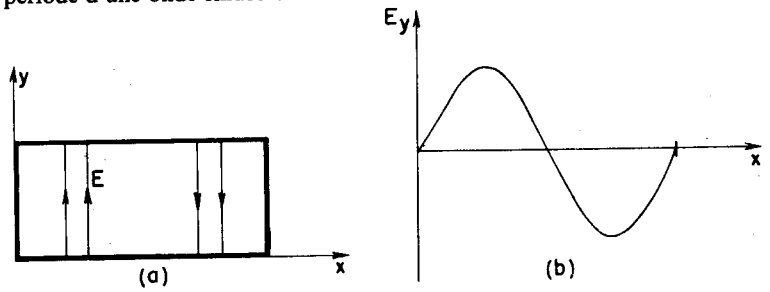

Fig. 24-14. Une autre possibilité de variation de E_y avec x.

solution aussi bonne, en prenant une période entière; la variation de E_y en fonction de x est indiquée sur la Fig. 24-14. Le k_x d'un tel mode est deux fois plus grand, de sorte que la fréquence de coupure est beaucoup plus grande. De plus, dans l'onde que nous avons étudiée, **E** n'a qu'une composante en y, mais il existe d'autres modes avec des champs électriques plus compliqués. Si le champ électrique n'a de composantes qu'en x et y – de sorte que le champ électrique total est toujours à angle droit de la direction des z – le mode est dit « transverse électrique » (ou T.E.). Le champ magnétique de tels modes aura toujours une composante suivant z. Il se trouve que si **E** a une composante dans la direction des z (le long de la direction de propagation), le champ magnétique n'aura que des composantes transversales. De tels champs sont donc appelés des modes transverses magnétiques (T.M.). Pour un guide rectangulaire, tous les autres modes ont une fréquence de coupure plus élevée que le mode T.E. simple que nous avons décrit. Il est par conséquent possible – et usuel – d'utiliser un guide à une fréquence juste supérieure à la coupure pour ce mode le plus bas, mais inférieure à la fréquence de coupure pour tous les autres modes, de sorte qu'il n'y a qu'un seul mode qui se propage. Autrement le comportement devient compliqué et difficile à contrôler.

24-8 Une autre façon de voir les guides d'ondes

Nous avons l'intention de vous montrer une autre façon de comprendre pourquoi un guide d'ondes atténue les champs rapidement pour des fréquences inférieures à la fréquence de coupure ω_c. Vous aurez alors une idée plus « physique » de la raison pour laquelle le comportement change si radicalement entre les basses et les hautes fréquences. On peut le faire pour le guide rectangulaire en analysant les champs en fonction des réflexions – ou images – sur les parois du guide. Cette méthode ne convient cependant que pour des guides rectangulaires: c'est la raison pour laquelle nous avons commencé par une analyse plus mathématique qui convient, en principe, pour des guides de forme quelconque.

Pour le mode que nous avons décrit, la dimension verticale (en y) n'a pas d'effet, nous pouvons donc ignorer le haut et le bas du guide et supposer que le guide s'étend indéfiniment dans la direction verticale. On suppose donc que le guide consiste juste en deux plaques verticales distantes de a.

Disons que la source des champs est un fil vertical placé au milieu du guide, le fil transportant un courant qui oscille à la fréquence ω. En l'absence des parois du guide un tel fil rayonne des ondes cylindriques.

Supposons maintenant que les parois du guide sont des conducteurs parfaits. Alors, exactement comme en électrostatique, les conditions à la surface seront satisfaites si on ajoute au champ du fil celui d'une ou plusieurs images du fil convenablement choisies. L'idée d'image marche tout aussi bien en électrodynamique qu'en électrostatique, pourvu, évidemment, qu'on introduise aussi les retards. Nous savons que c'est vrai parce que nous avons souvent vu un miroir donner l'image d'une source lumineuse. Et un miroir est précisément un conducteur « parfait » pour les ondes électromagnétiques de fréquences optiques.

Prenons donc une coupe horizontale, comme celle de la Fig. 24-15, où W_1 et W_2 sont les deux parois du guide et S_0, le fil source. Nous prenons la direction du courant dans le fil pour direction positive. Maintenant, s'il n'y avait qu'une paroi, disons W_1, nous pourrions la retirer si nous placions une source image (de polarité opposée) à l'endroit marqué S_1. Mais avec les deux parois, il y a aussi une image de S_0 dans

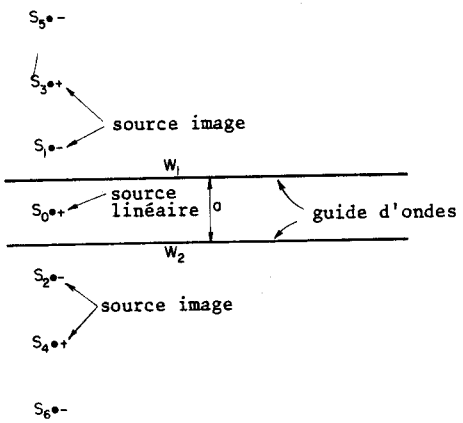

Fig. 24-15. Source linéaire S_0 entre les parois conductrices planes W_1 et W_2. On peut remplacer les parois par une suite infinie de sources images.

la paroi W_2, que nous représentons par l'image S_2. Cette source aussi aura une image dans W_1, nous l'appellerons S_3. Mais maintenant S_1 et S_3 vont toutes deux avoir des images dans W_2 aux emplacements notés S_4 et S_6 et ainsi de suite. Pour nos conducteurs plans avec la source à mi-chemin entre eux, les champs sont les mêmes que ceux produits par une rangée infinie de sources, distantes de a les unes des autres. (C'est en fait exactement ce que vous pourriez *voir* en regardant un fil placé à mi-chemin entre deux miroirs plans parallèles.) Pour que les champs soient nuls sur les parois, la polarité des courants dans les images doit alterner d'une image à la suivante. En d'autres termes, ils oscillent avec un déphasage de 180°. Le champ du guide d'ondes est alors l'exacte superposition des champs d'un tel ensemble infini de sources linéaires.

Nous savons que très près des sources, le champ est très semblable au champ statique. Nous avons étudié au paragraphe 7-5 le champ statique créé par un réseau de sources linéaires et trouvé qu'il est semblable au champ d'un plateau chargé, sauf pour des termes qui décroissent exponentiellement avec la distance au réseau. Ici la valeur moyenne de l'intensité de la source est nulle, parce que les signes alternent d'une source à la suivante. Tous les champs existants doivent décroître exponentiellement avec la distance. Près de la source, nous voyons surtout le champ dû à la source la plus proche; à grande distance, beaucoup de sources contribuent et leur effet moyen est nul. Nous voyons ainsi maintenant pourquoi le guide d'ondes donne au-dessous de la fréquence de coupure un champ décroissant exponentiellement. Aux basses fréquences en particulier, l'approximation statique est bonne, et elle prévoit une atténuation rapide des champs en fonction de la distance.

Nous nous trouvons maintenant en face de la question inverse: pourquoi somme toute, y a-t-il des ondes qui se propagent? Voilà le point mystérieux! La raison est qu'aux hautes fréquences le retard des champs peut introduire des changements de phase supplémentaires qui peuvent entraîner que les champs des sources déphasées s'ajoutent au lieu de s'annuler. En fait, au chapitre 29 du Vol. I nous avons déjà étudié, justement pour ce problème, les champs engendrés par un réseau d'antennes ou par un réseau optique. Nous avions alors trouvé que lorsque plusieurs antennes radio sont convenablement disposées elles peuvent donner un système d'interférences ayant un fort signal dans une certaine direction mais aucun signal dans une autre.

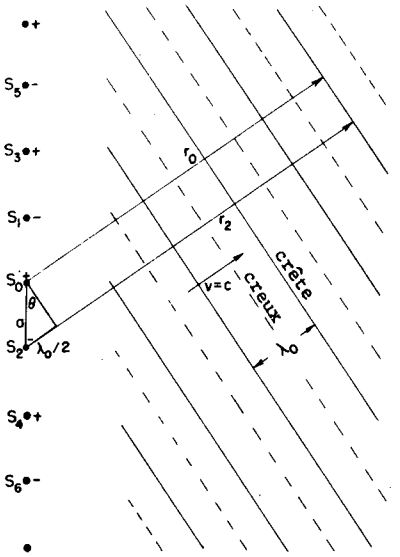

Fig. 24-16. Un ensemble d'ondes cohérentes créées par une distribution de sources linéaires.

Retournons à la Fig. 24-15 et étudions les champs qui arrivent à grande distance de la rangée des sources images. Le champ ne sera intense que dans certaines directions qui dépendent de la fréquence – dans les seules directions pour lesquelles les champs de toutes les sources s'ajoutent en phase. A une distance raisonnable des sources, le champ se propage dans ces directions spéciales comme des ondes planes. Nous avons schématisé une telle onde sur la Fig. 24-16, où les traits pleins représentent les crêtes des ondes et les pointillés représentent les creux. La direction de l'onde sera celle pour laquelle la différence des retards pour deux sources voisines au ventre d'une onde correspond à une demi-période. En d'autres termes, la différence entre r_2 et r_0 sur la figure est la moitié de la longueur d'onde dans le vide:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

L'angle θ est alors donné par

$$\sin\theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \tag{24.33}$$

Il existe évidemment un autre ensemble d'ondes se propageant vers le bas en faisant avec la ligne des sources l'angle symétrique. Le champ total du guide d'ondes (pas trop près de la source) est la superposition de ces deux ensembles d'ondes, comme le montre la Fig. 24-17. Les champs réels ne sont en fait comme cela qu'entre les deux parois du guide, naturellement.

En des points tels que A et C les crêtes des deux systèmes d'ondes coïncident et le champ présente un maximum; en des points tels que B les deux ondes ont leurs valeurs négatives maximales et le champ est minimum (valeur négative la plus grande). Au cours du temps

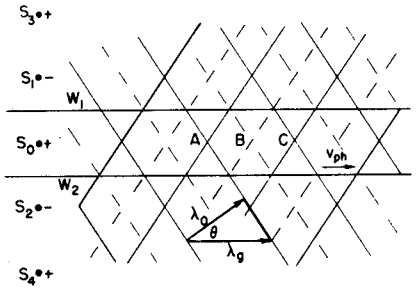

Fig. 24-17. Le champ du guide d'ondes peut être considéré comme la superposition de deux trains d'ondes planes.

le champ dans le guide paraît se propager le long du guide avec une longueur d'onde λ_g qui est la distance entre A et C. Cette distance est liée à θ par

$$\cos\theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \tag{24.34}$$

Tirant θ de l'Eq. (24.33) on obtient

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos\theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}}, \tag{24.35}$$

ce qui est bien ce que nous avions trouvé dans l'Eq. (24.19).

Nous voyons maintenant pourquoi il n'y a propagation d'onde qu'au-dessus de la fréquence de coupure ω_0. Si la longueur d'onde dans le vide est plus grande que $2a$ il n'y a pas d'angle tels que les ondes indiquées sur la Fig. 24-16 puissent apparaître. L'interférence constructive nécessaire apparaît brusquement quand λ_0 tombe au-dessous de $2a$, ou quand ω devient supérieur à $\omega_0 = \pi c/a$.

Si la fréquence est assez haute il peut exister deux ou plusieurs directions dans lesquelles les ondes vont apparaître. Dans notre cas ceci se produira si $\lambda_0 < 2a/3$. En général, cependant, cela pourrait aussi arriver quand $\lambda_0 < a$. Ces ondes supplémentaires correspondent aux modes plus élevés que nous avons mentionnés.

Notre analyse a également mis en évidence pourquoi la vitesse de phase des guides d'ondes est supérieure à c et pourquoi cette vitesse dépend de ω. Si ω varie, l'angle des ondes dans le vide (Fig. 24-16) varie et par conséquent il en est de même de la vitesse le long du guide.

Bien que nous ayons décrit le guide d'ondes comme la superposition de champs dus à une rangée infinie de sources linéaires, vous pouvez voir que nous serions arrivés au même résultat si nous avions imaginé deux ensembles d'ondes dans le vide se réfléchissant continuellement en va-et-vient entre deux miroirs parfaits – en se rappelant qu'une réflexion implique un changement de signe de la phase. Ces ensembles d'ondes réfléchies s'annuleraient mutuellement à moins qu'ils ne se propagent précisément suivant l'angle θ de l'Eq. (24.33). Il y a de nombreuses façons de considérer une même chose.