Annexe 1

III.2. LIGNES DE TRANSMISSION

III.2.1. Exposé général

Pour transmettre un signal électrique, de fréquences inférieures au G Hz, il est usuel d'utiliser ce qu'il est convenu d'appeler des lignes de transmission. Celles-ci sont constituées par deux conducteurs séparés par un diélectrique (air, polyéthylène, etc.). Aux fréquences plus élevées, les lignes de transmission sont en compétition avec les guides d'ondes (un conducteur) et ensuite (*) la propagation dans un diélectrique (pas de conducteur).

Nous désirons transmettre un signal, si possible sans déformation (Aspect A).

Nous considérons une ligne placée suivant l'axe des x. Pour spécifier qu'il n'y a pas de déformation, il suffit dans l'aspect B de stipuler que

$$f(x,t) = f(\alpha) = f(x \pm vt) \qquad (16)$$

(*) Pas tout à fait exact ! La propagation de signaux dans l'atmosphère est réalisée par ondes électromagnétiques à partir de quelques dizaines de Herz. Mais l'efficacité du point de vue énergétique est plutôt médiocre.

où la fonction $f(\alpha)$ décrit le signal et v est une constante. Nous faisons, dans cette section, la convention que v désigne un nombre positif ou nul. Pour indiquer le sens de propagation, il sera dans les expressions précédé du signe - (sens de propagation vers les x croissants) ou + .

L'équation de propagation, décrivant cet idéal, doit être de la forme

$$\boxed{\frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 f}{dx^2}} \qquad (17)$$

avec, répétons-le, v indépendant de la fréquence. Dans la réalité, il n'en sera pas ainsi de manière stricte. Mais une très bonne approximation sera réalisée à l'aide des câbles coaxiaux. Ceux-ci sont constitués par deux cylindres conducteurs coaxiaux isolés par un diélectrique. Si nous observons une onde monochromatique progressant dans un tel câble, dans le sens des x croissants, nous allons remarquer que la puissance transmise en x va être raisonnablement décrite par

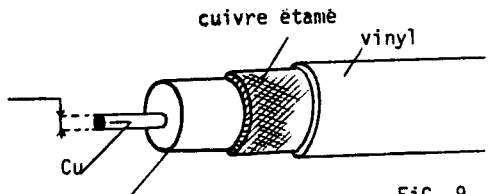


FiG. 9
Constitution d'un câble coaxial

$$P(x) = P(o)\, e^{-2\alpha x} = p(o)\, 10^{-Dx/10} \qquad (18)$$

où α est le coefficient d'atténuation exprimé en Neper par mètre, et

D est le même coefficient exprimé en dB/m . Remarquons que 1 Neper/m correspond à 8,686 dB/m. Pour une onde monochromatique, et le câble RG-58 (très utilisé), le coefficient d'atténuation est en bonne approximation donné par

$$\alpha \approx 1{,}2\ 10^{-6} \sqrt{\nu} \quad \text{Neper/m} \qquad (19)$$

pour $\nu < 100$ MHz.

Les équations (18) et (19), nous permettent de calculer les valeurs données ci-dessous.

Fréquence (Hz) du signal sinusoïdal	Perte en amplitude pour un câble de 2 m	200 m
0	0	0
100 Hz	$2.4\ 10^{-5}$	$2.4\ 10^{-3}$
10 kHz	$2.4\ 10^{-4}$	$2.4\ 10^{-2}$
1 MHz	$2.4\ 10^{-3}$	0.271
10 MHz	$7.6\ 10^{-3}$	0.53

Tableau I

et qui donne les pertes en amplitude aux différentes fréquences pour deux câbles de 2 m et de 200 m de longueur. On y lit ainsi, que pour un câble de 200 m et un signal sinusoïdal de 10 MHZ, la perte est de 0,53. Autrement dit, pour un signal d'amplitude de 1 V à l'entrée, nous aurons une amplitude de 0,47 V à la sortie.

Ayant ces ordres de grandeur sous les yeux, nous pouvons faire les commentaires suivants :

1) Le coefficient d'atténuation (19) dépend de la fréquence. Les pertes, dans le domaine des fréquences considéré dans ce paragraphe, sont essentiellement dues aux conducteurs (99 % à 1 MHz). Aux fréquences élevées, les densités de courant sont maximum à la surface, et décroissent exponentiellement dans le conducteur. La profondeur de pénétration (δ), profondeur pour laquelle la densité de courant a diminué d'un facteur e, est donnée par $\delta \approx \sqrt{\rho/\pi \nu \mu_0}$ (20)

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide,
ρ est la résistivité du conducteur,
ν est la fréquence du courant.

Ainsi, pour le Cu, pour lequel $\rho \approx 1{,}72\ 10^{-8}\ \Omega$ m, l'on obtient les valeurs données dans le tableau ci-contre. Etant donné que le diamètre du conducteur intérieur est de $\approx 0{,}3$ cm, l'on voit directement que l'effet lié à δ va jouer un rôle important dès que $\nu > 10^3$ Hz. Les valeurs données se rapportent à un conducteur idéalisé, en ne tenant pas compte de l'état de surface. Ce tableau explique l'intérêt porté (à ces fréquences) aux propriétés de la couche superficielle. Celle-ci est généralement obtenue par galvanoplastie.

ν (Hz)	δ (en cm)
10^2	0,66
10^4	$6{,}6\ 10^{-2}$
10^6	$6{,}6\ 10^{-3}$
10^7	$2{,}1\ 10^{-3}$

Tableau II

2) Ce coefficient d'atténuation dépendant de la fréquence peut paraître très gênant, puisqu'il implique une déformation du signal transmis. En effet, les harmoniques élevées seront plus atténuées que les fréquences basses Mais le tableau I montre immédiatement que pour les longueurs de câble usuelles (quelques mètres) et jusqu'à une fréquence de l'ordre de la dizaine de MHz, l'effet sera négligeable. Il n'en sera plus de même pour des longueurs de l'ordre des centaines de mètres, cas pour lesquels des précautions devront être prises.

III.2.2. Modèle simplifié - câble de "longueur infinie".

Nous allons nous placer dans le cas où l'atténuation dans le câble est négligeable, c'est-à-dire le câble n'est pas trop long et les variations ne sont pas trop rapides. Nous allons dans ces conditions considérer ce qu'il est convenu d'appeler une "ligne infinie". Par ce terme, nous ne déclarons pas que nous prenons une ligne (c'est-à-dire un câble) de longueur infinie, ce serait en effet en contradiction avec les phrases précédentes. Ce terme signifie que nous étudions dans une ligne de transmission homogène un fragment suffisamment éloigné de toute discontinuité (par exemple coupure de la ligne) que pour pouvoir considérer que tout se déroule "comme si" la ligne était infiniment longue. Ensuite, dans une seconde étape, nous étudierons les effets liés aux discontinuités.

Soit une ligne de transmission homogène, placée le long de l'axe x . Considérons un segment dx compris entre les abscisses x et x + dx. Nous imposons que les courants, dans chacun des conducteurs, soient de même amplitude et de sens opposé. Nous pourrons calculer la capacité (Cdx) et la self-induction (Ldx) pour un élément dx du câble. Ainsi, pour un coaxial, il est aisé de montrer que

$$Cdx = \frac{2\pi\epsilon}{\ell n(b/a)}\, dx \qquad (21)$$

$$Ldx = \frac{\mu_0}{2\pi}\, \ell n(b/a)\, dx \qquad (22)$$

où ϵ est la permittivité du milieu placé entre les deux conducteurs, avec $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$
μ est la perméabilité magnétique, en pratique $\mu \approx \mu_0$.
b et a sont respectivement les diamètres extérieurs et intérieurs du polyéthylène (voir fig. 9).
La connaissance de C et L va nous permettre de déterminer I et V .

Si Q est la charge électrique portée par chaque conducteur entre x et x + dx, nous aurons

$$Q = V(x,t)\ C\ dx$$

La dérivée par rapport au temps de cette charge, correspond à la différence de courant entrant et sortant du segment, c'est-à-dire que

$$I(x,t) - I(x + dx,\ t) = \frac{dQ}{dt}$$

En combinant ces deux relations nous aurons

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -C\ \frac{\delta V}{\delta t} \qquad (22)$$

Quant à la différence de potentiel électrique entre x et x + dx, elle est due à la self-induction dans ce segment, c'est-à-dire

$$V(x,t) - V(x + dx,\ t) = L\ dx\ \frac{\delta I}{\delta t}$$

ou encore

$$\frac{\delta V}{\delta x} = -L\ \frac{\delta I}{\delta t} \qquad (23)$$

Les équations (22) et (23) nous donnent immédiatement

$$\frac{\delta^2 I}{\delta t^2} = \frac{1}{LC}\ \frac{\delta^2 I}{\delta x^2} \qquad (24)$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta t^2} = \frac{1}{LC}\ \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} \qquad (25)$$

Il s'agit d'une équation de propagation sans atténuation ni déformation. L'absence d'atténuation ne doit guère nous surprendre, puisque nous avons évité dans notre modèle tout élément dissipatif. Comme il fallait s'y attendre, V et I progressent à la même vitesse, celle-ci étant

$$v = \pm(LC)^{-1/2} \qquad (26)$$

Dans le cas du câble coaxial, nous obtenons que

$$v = \pm(\mu_0 \epsilon)^{-1/2} = \pm\ \epsilon_r^{-1/2}\ c \qquad (27)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.
v correspondant à la vitesse des ondes électromagnétiques dans le milieu diélectrique.

Ainsi, pour le câble RG 58, où $\epsilon_r \approx 2{,}25$, $v = 2\ 10^8$ m/s.

Prenons le cas d'une onde progressive dans le câble :

$$V(x,t) = f(x \mp vt)$$

où v est un nombre positif.

Le signe supérieur (-) correspond à une progression vers les x positifs, tandis que le signe inférieur (+) correspond à une progression vers les x négatifs. Calculons, dans ces deux cas I(x,t) à partir de V(x,t), en utilisant la relation (22) :

$$\frac{\delta I}{\delta x} = -C \frac{\delta f(x \mp vt)}{\delta t} \tag{28}$$

dont la solution est

$$I(x,t) = (\pm v)\ C\ f(x \mp vt) \tag{29}$$

ou encore

$$\boxed{V(x,t) = \pm Z_o\ I(x,t)} \tag{30}$$

où $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$ est l'impédance caractéristique du câble. Dans ce modèle, il s'agit d'une résistance.

Dans le cas des câbles coaxiaux, nous aurons

$$Z_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_r \epsilon_o}}\ \ell n\ \frac{b}{a} \approx \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}}\ \ell n(\frac{b}{a}) \tag{31}$$

Dans le cas du câble RG 58, $Z_o \approx 52{,}5\ \Omega \approx 50\ \Omega$. Pour les valeurs usuelles de $\frac{b}{a}$ et ϵ_r nous obtiendrons des impédances comprises entre 50 Ω et 125 Ω .

Dans de nombreuses applications, il nous sera utile de calculer V(x,t) et I(x,t) à partir de la connaissance des distributions initiales V(x,0) et I(x,0). Pour ce faire, actons que les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont V(x,t) et I(x,t) étant linéaires, toute combinaison linéaire de solution est une solution.

La solution générale est donc :

$$\begin{aligned} V(x,t) &= f_p(x - vt) + f_n(x + vt) = V_p(x,t) + V_n(x,t) = f_p(\alpha_p) + f_n(\alpha_n) \\ I(x,t) &= \frac{1}{Z_o}\{f_p(x - vt) - f_n(x + vt)\} = I_p(x,t) + I_n(x,t) = \frac{1}{Z_o}\{f_p(\alpha_p) - f_n(\alpha_n)\} \end{aligned} \tag{32}$$

avec $\alpha_p = x - vt$ et $\alpha_n = x + vt$.

Dans ces équations, $V_p(x,t)$, $I_p(x,t)$ et $f_p(\alpha_p)$ sont associés à une onde se propageant dans le sens des x positifs, tandis que les mêmes coefficients caractérisés par l'indice n représentent l'onde se propageant dans le sens des x négatifs. La résolution complète demande la connaissance de $f_p(x)$ et $f_n(x)$, ce qui est possible par la connaissance des conditions initiales. En effet, au temps initial (ici t = 0) :

$$\begin{aligned} V(x,0) &= f_p(x) + f_n(x) \\ I(x,0) &= \frac{1}{Z_o}\{f_p(x) - f_n(x)\} \end{aligned} \tag{33}$$

et nous aurons donc :

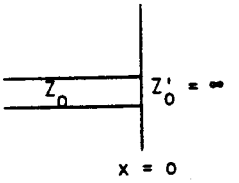
$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{1}{2}\{V(x,0) + Z_o\ I(x,0)\} \\ f_n(x) &= \frac{1}{2}\{V(x,0) - Z_o\ I(x,0)\} \end{aligned} \tag{34}$$

Ces équations pourront être résolues, suivant le même processus, si nous connaissons en un point x_o les fonctions $V(x_o,t)$ et $I(x_o,t)$.

III.2.3. Effets des discontinuités

Il est bien connu en physique, que lorsqu'une onde progressive transversale ou longitudinale rencontre une discontinuité, une partie de l'onde est transmise au-delà de la discontinuité, tandis qu'une autre partie est réfléchie (voir mécanique, optique, fluides, etc.). Dans certains cas particuliers, l'énergie transmise ou réfléchie pourra être nulle. Considérons d'abord ces cas particuliers. Plaçons pour notre facilité, la discontinuité en $x = 0$ et caractérisons par l'indice prime, les caractéristiques du milieu situé à droite. L'onde arrive de la gauche. Prenons tout d'abord les cas où l'énergie transmise est nulle. Nous n'avons donc qu'à étudier ce qui se passe à gauche de $x = 0$, et l'onde incidente sera $f_p(x - vt)$, tandis que l'onde réfléchie sera $f_n(x + vt)$.

$\boxed{Z_0' = \infty}$ Absence de ligne à droite



En $x = 0$ nous aurons

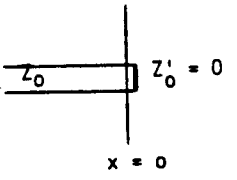
$$V(0,t) = f_p(-vt) + f_n(+vt)$$
$$I(0,t) = \frac{1}{Z_0}\{f_p(-vt) - f_n(+vt)\} \qquad (35)$$

$Z' = \infty$ implique $I(0,t) = 0$ c'est-à-dire que $f_n(\alpha) = f_p(-\alpha)$.

(32) →
$$V(x,t) = f_p(x - vt) + f_p(-x - vt)$$
$$I(x,t) = \frac{1}{Z_0}\{f_p(x - vt) - f_p(-x - vt)\} \qquad (36)$$

La réflexion du signal en tension se fait sans changement de signe (fig. 10) tandis que la réflexion du signal en courant s'opère avec changement de signe (fig. 11).

$\boxed{Z_0' = 0}$ Court circuit à droite.



En $x = 0$ nous aurons les équations (35).
$Z' = 0$ implique $V(0,t) = 0$, c'est-à-dire que $f_n(\alpha) = -f_p(-\alpha)$

(32) →
$$V(x,t) = f_p(x - vt) - f_p(-x - vt)$$
$$I(x,t) = \frac{1}{Z_0}\{f_p(x - vt) + f_p(-x - vt)\} \qquad (37)$$

Dans ce cas la réflexion du signal en tension se fait avec changement de signe (fig. 11) tandis que celle du signal en courant a lieu sans changement de signe (fig. 10).

Considérons maintenant le cas particulier, pour lequel l'énergie réfléchie est nulle, à savoir que $Z_0' = Z_0$! Ce cas est moins simpliste qu'il n'apparaît à première vue. Il pourra être réalisé par la connection de deux câbles de même impédance, bien que leurs caractéristiques physiques et spatiales (ϵ_r,a,b) puissent être différentes (voir équation 31). Il sera également réalisé par le branchement d'une charge de résistance Z_0 en bout de ligne. Le plus souvent, il s'agira de la résistance d'entrée # ou de sortie # d'un appareil de laboratoire. La résolution d'un tel cas est triviale. Du point de vue propagation, la condition $Z_0' = Z$ revient à ne pas avoir de discontinuité, et $f_n(\alpha) = 0$! L'onde progresse sans perturbation (fig. 12).

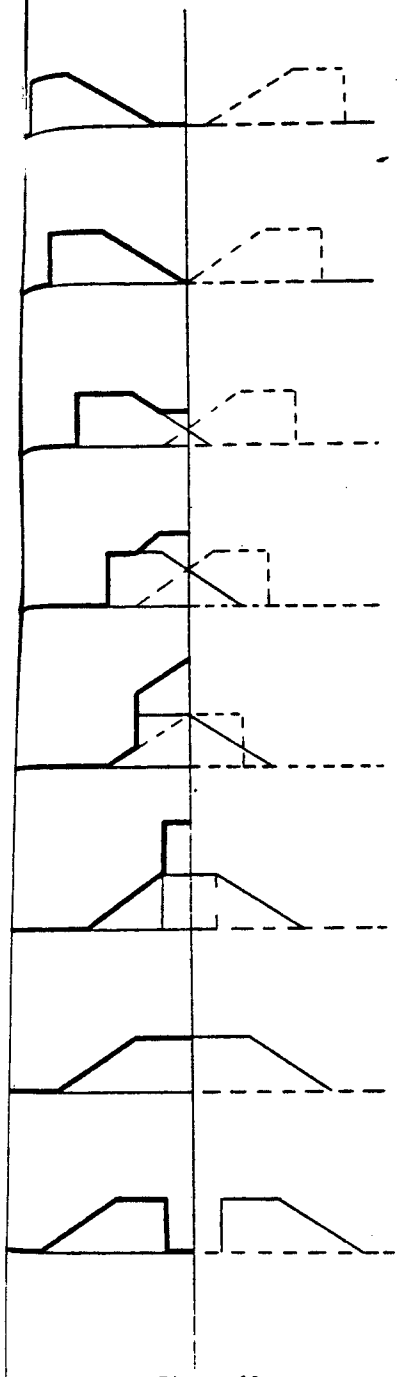


Figure 10

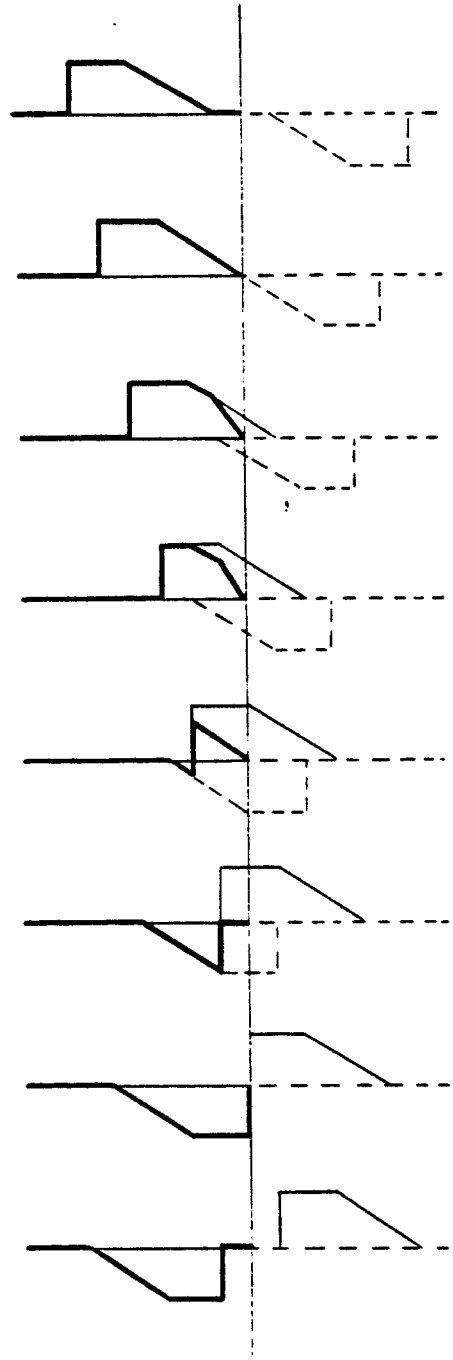


Figure 11

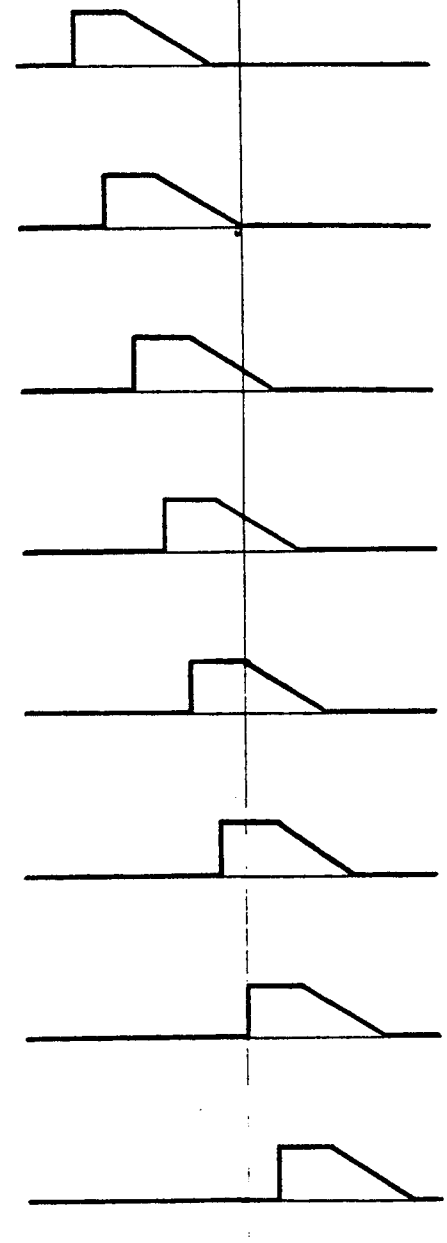


Figure 12

Faute de temps, nous n'allons pas faire les calculs pour le cas général. Nous laissons le soin aux étudiants de vérifier que pour le cas ou Z_0' et Z_0 sont deux résistances (à savoir R_0' et R) nous aurons que

$$f_n(\alpha) = \beta \; f_p(-\alpha) \qquad (38)$$

avec $\beta = \dfrac{R_0' - R_0}{R_0' + R_0}$.

La puissance réfléchie sera proportionnelle à β^2. L'incidence pratique de ces résultats est claire. Dans de nombreuses applications de laboratoire, il est indispensable d'envoyer des signaux d'un appareil à l'autre, en évitant les réflexions multiples dans les câbles. Pour ce faire, il faudra en principe éviter les discontinuités, par exemple en branchant aux extrémités des câbles dont l'impédance d'entrée soit aussi proche que possible de l'impédance du câble. Il ne faut pas nécessairement être très exigeant. Ainsi, les relations (38) montrent [illegible] $2.2.10^{-3}$ de la puissance incidente.

III.2.4. Réflectométrie

L'étude des propriétés et défauts des câbles peut se faire par réflectométrie. Pour ce faire, l'on utilise le montage suivant :

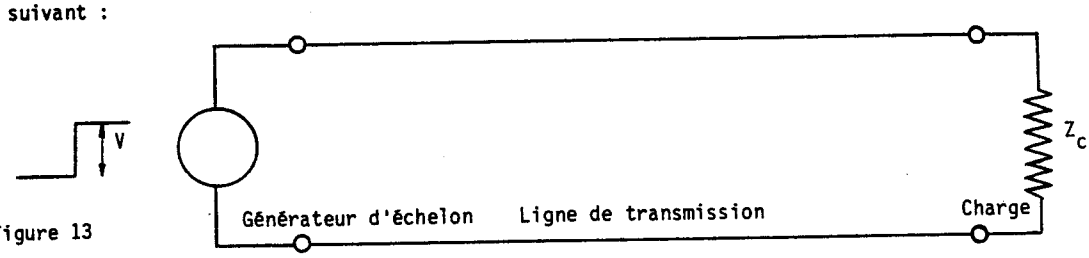
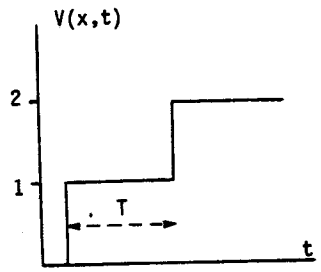
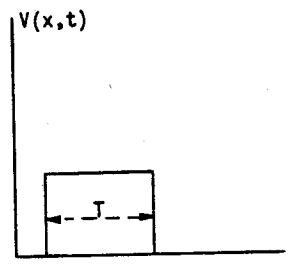


Figure 13

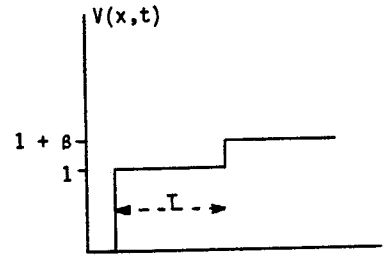
Un générateur d'échelon génère un passage très rapide (≈ 150 ps) d'une tension nulle à une tension V . Cet échelon est appliqué à une ligne de transmission, terminée par une charge connue ou inconnue. La tension V(x,t) est observée, à l'aide d'un oscilloscope en un point d'ordonnée x . La variation dans le temps de V(x,t) va nous permettre de déterminer les caractéristiques du câble et de la charge. Des précautions sont prises, pour rendre négligeables les réflexions liées au générateur d'échelon et à l'oscilloscope. Dans le cas où les pertes sont négligeables, les figures ci-dessous donnent les observations suivantes et leur interprétation.



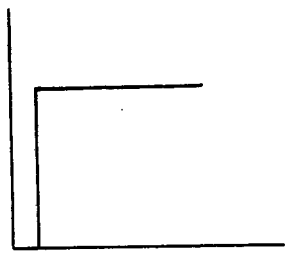
Câble "ouvert" à une distance $d = \frac{VT}{2}$



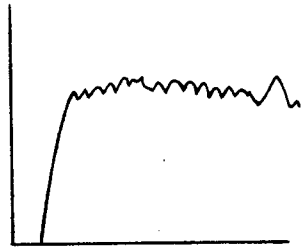
Court-circuit à une distance $d = \frac{VT}{2}$



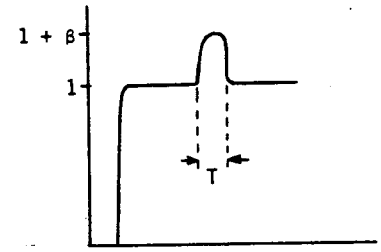
Charge $R'_0 = R_0 \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$ à une distance $d = \frac{VT}{2}$



Câble parfait



Câble de "qualité douteuse"

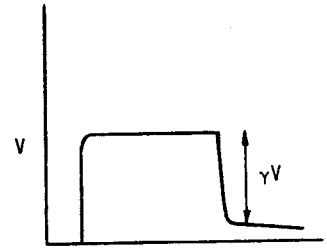


Effet de l'insertion d'un câble de longueur $d' = \frac{T}{2V}$ et d'impédance $R'_0 = R' \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}$

Il est également aisé, par réflectométrie, de mesurer le coefficient d'atténuation d'un câble. Pour cela, il suffit de court-circuiter le câble à une distance connue d , et d'observer le retour de l'extrémité (fig. 14). L'utilisation de la relation (18) donne directement

$$D = \frac{(-10 \log_{10} \gamma)}{d} \qquad (39)$$

Ainsi pour d = 100 m, une expérience donnant γ = .8 implique $D = 9{,}7\ 10^{-3}$ dB/m .



Effet d'un court-circuit à l'extrémité d'un câble avec pertes

Figure 14